

## 4 VARIANTY UKÁZKOVÝCH ZKOUŠKOVÝCH PÍSEMEK

MATEMATIKA (PEF — PAA)

### VARIANTA 1

**Úloha 1:** Spočtěte hodnotu druhé derivace funkce  $f$  v bodě  $x = -1$

$$f(x) = \frac{e^x(x-3)}{2x+3}.$$

**Úloha 2:** Nalezněte všechny asymptoty grafu funkce  $f$

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 1}{3 - x}.$$

**Úloha 3:** Určete maximální intervaly monotonie funkce

$$f(x) = 5\sqrt{-x^2+3x+4}.$$

**Úloha 4:** Spočtěte

$$\int \cos x \left( \frac{1}{\cos^3 x} + \frac{1}{\sin x + 2} \right) dx.$$

**Úloha 5:** Spočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami o rovnicích

$$x - y = 0 \quad \text{a} \quad y = \frac{x^2}{2} - x.$$

**Úloha 6:** Určete hodnotu matice  $\mathbf{A}$  v závislosti na parametru  $k$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 1 & 1 \\ -8 & -7 & -6 & k \end{pmatrix}.$$

### VARIANTA 2

**Úloha 1:** Nalezněte definiční obor funkce

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 8x + 3} \arccos \frac{x-3}{x+1}.$$

**Úloha 2:** Spočtěte limitu. Pokud při výpočtu použijete nějaké pravidlo, ověřte jeho předpoklady.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{9 \operatorname{tg}^2 x - 3}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos(7x)}.$$

**Úloha 3:** Určete maximální intervaly konvexity a konkávity funkce

$$f(x) = x + \operatorname{arctg}(2x + 3).$$

**Úloha 4:** Spočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami o rovnicích

$$y = 0, \quad y = \sqrt{2x+8}, \quad y = \sqrt{2-x}.$$

**Úloha 5:** Spočtěte inverzní matici k matici  $\mathbf{A}$  a výsledek ověřte zkouškou

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Úloha 6:** Pomocí Cramerova pravidla spočtěte neznámou  $x$  ze soustavy

$$\begin{array}{rcl} -x + 3y + 2z & = & 5 \\ -x - 2y & = & 1 \\ -3x + 4y - z & = & 6 \end{array}$$

#### VARIANTA 3

**Úloha 1:** Nalezněte všechny asymptoty grafu funkce  $f$

$$f(x) = x \ln x.$$

**Úloha 2:** Napište rovnice všech tečen ke grafu funkce  $f$ , které jsou rovnoběžné s přímkou  $p$ :

$$f : y = 4x^2 - 6x + 5 ; \quad p : -6x + 3y - 5 = 0.$$

**Úloha 3:** Nalezněte všechny lokální a globální extrémy funkce  $f$  na intervalu  $\langle -3, 2 \rangle$  a určete jejich kvalitu

$$f(x) = \ln(4x^2 + 8x + 5) + \ln 3.$$

**Úloha 4:** Spočtěte

$$\int x \left( e^x + \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} \right) dx.$$

**Úloha 5:** Spočtěte

$$\int_{-3/4}^{(\pi^2-3)/4} \sin \sqrt{4x+3} dx.$$

**Úloha 6:** Nalezněte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcl} x + 3y + 3z - 4t & = & 6 \\ x + 2y + 3z - 8t & = & 4 \\ x + 4y + 3z + 3t & = & 8 \\ -x - y - 3z + 6t & = & -2 \end{array}$$

#### VARIANTA 4

**Úloha 1:** Spočtěte limitu. Pokud při výpočtu použijete nějaké pravidlo, ověřte jeho předpoklady.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2+x} - 2}{\sqrt{1+3x}}.$$

**Úloha 2:** Napište rovnici tečny a rovnici normály ke grafu funkce  $f$  v bodě grafu  $T = [0, ?]$ , když

$$f : y = \sin^4 x - \cos^4 x.$$

**Úloha 3:** Určete maximální intervaly konvexity a konkávity funkce

$$f(x) = \ln(-x^2 - 4x + 5).$$

**Úloha 4:** Spočtěte

$$\int (x^2 + 3x) \cos x dx.$$

**Úloha 5:** Spočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami o rovnicích

$$x - 2y = 3 \quad \text{a} \quad xy = -1.$$

**Úloha 6:** Spočtěte matici  $\mathbf{X}$  z maticové rovnice  $\mathbf{X} \mathbf{A} = \mathbf{B}$ , když

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -7 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 9 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Výsledky.** 1/1)  $-22/e$

1/2)  $a_1 : x = 3, a_2 : y = 2x + 3$

1/3) roste na  $\langle -1, \frac{3}{2} \rangle$ , klesá na  $\langle \frac{3}{2}, 4 \rangle$

1/4)  $\operatorname{tg} x + \ln(\sin x + 2) + C$

1/5)  $16/3$

1/6)  $h = 3$  pro  $k = -3$ , jinak  $h = 4$

2/1)  $\langle 1, \infty \rangle$

2/2)  $-\frac{16\sqrt{3}}{7}$

2/3) konvexní na  $(-\infty, -\frac{3}{2})$ , konkávní na  $\langle -\frac{3}{2}, \infty \rangle$

2/4)  $P = 8$

2/5)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -6 & 9 & -2 \end{pmatrix}$

2/6)  $x = -9/5$

3/1) graf funkce nemá žádné asymptoty

3/2)  $3/2$

3/3) ostré lokální a ostré globální minimum v bodě  $x = -1$ , ostré globální maximum v bodě  $x = 2$

3/4)  $e^x(x-1) + \sqrt{4+x^2} + C$

3/5)  $\frac{\pi}{2}$

3/6)  $(x, y, z, t) = (-3r, 2, r, 0), r \in \mathbb{R}$

4/1)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4/2)  $t : y = -1, n : x = 0$

4/3) konkávní na  $(-5, 1)$

4/4)  $(x^2 + 3x - 2) \sin x + (2x + 3) \cos x$

4/5)  $\frac{3}{4} - \ln 2$

4/6)  $X = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$