1. Funkce více proměnných — spojitost, limita, parciální derivace

(Matematika 3)

Petr Gurka

aktualizováno 20. září 2019

Obsah

1 $\mathbb{R}^n$ jako normovaný lineární prostor

1.1 Vektorový prostor

Definice 1. Neprázdná množina $\mathbf{X}$ s operacemi součet prvků z $\mathbf{X}$, která každým $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ přiřazuje prvek $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{X}$, a násobek prvku, která každému $r \in \mathbb{R}$ a každému $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ přiřazuje prvek $r\,\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, je vektorovým prostorem, jsou-li pro všechny prvky $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w} \in \mathbf{X}$ a $r, s \in \mathbb{R}$ splněny následující vlastnosti:

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;
- $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{w}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{w}$;
- existuje prvek $\mathbf{o} \in \mathbf{X}$ tak, že $\mathbf{x} + \mathbf{o} = \mathbf{x}$;
- $r(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = r\,\mathbf{x} + r\,\mathbf{y}$;
- $(r + s)\mathbf{x} = r\,\mathbf{x} + s\,\mathbf{x}$;
- $r(s\,\mathbf{x}) = (r\,s)\mathbf{x}$;
- $1\,\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $0\,\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

Prvky z $\mathbf{X}$ nazveme vektory, prvek $\mathbf{o}$ se nazývá nulový vektor.

1.2 Norma, normovaný lineární prostor

Definice 2. Na vektorovém prostoru $\mathbf{X}$ definujeme normu. Norma (velikost) vektoru je *nezáporná* reálná funkce $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, která splňuje následující podmínky:

- $\|\mathbf{x}\| = 0$, právě když $\mathbf{x} = \mathbf{o}$,
- $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \, \|\mathbf{x}\|$ (homogenita),
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (trojúhelníková nerovnost)

pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Dvojice $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ se nazývá normovaný lineární prostor, zkráceně NLP.

Příkladem NLP je $\mathbb{R}^n$. Pro $n = 2$ je

- $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$,
- $\lambda\,(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$,
- $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Poznamenejme, že na $\mathbb{R}^n$ je možné definovat normu $\|\cdot\|_p$ pro $p \in \langle 1, \infty \rangle$ následujícím způsobem. Pro $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ je

$$\|\mathbf{x}\|_p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\limits_{i \in \{1, \ldots, n\}} |x_i| & \text{pro } p = \infty. \end{cases}$$

Všechny tyto normy jsou navzájem ekvivalentní, jak plyne z nerovností:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty.$$

Dále budeme uvažovat na $\mathbb{R}^n$ euklidovskou normu $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, tj. pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{1}$$

1.3 Metrika, okolí bodu, otevřená a uzavřená množina

V NLP $\mathbf{X}$ zavádíme metriku (tj. vzdálenost) d pomocí normy $\|\cdot\|$:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}.$$

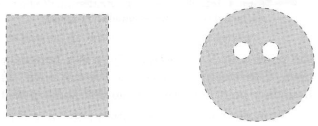
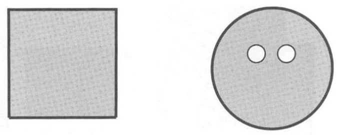
Definice 3. Nechť $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ je NLP, $\varepsilon > 0$, $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$. Definujeme:

- $U_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X}\,;\ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon\}$ (ε-okolí bodu $\mathbf{a}$),
- $P_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X}\,;\ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon\}$ (prstencové ε-okolí bodu $\mathbf{a}$).

Okolí $U_\varepsilon(\mathbf{a})$ je tedy množinou všech bodů $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, které mají od bodu $\mathbf{a}$ vzdálenost menší než ε. V prostoru $\mathbb{R}^2$ (s euklidovskou normou) je to otevřený kruh (tj. bez hraniční kružnice) s poloměrem ε a středem v bodě $\mathbf{a}$. Okolí $P_\varepsilon(\mathbf{a})$ je okolí $U_\varepsilon(\mathbf{a})$ bez bodu $\mathbf{a}$.

Definice 4. Množina G v NLP $\mathbf{X}$ je otevřená, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem, tj. ke každému $\mathbf{a} \in G$ existuje $\varepsilon > 0$, že $U_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset G$.

Definice 5. Množina F v NLP $\mathbf{X}$ je uzavřená, jestliže její doplněk $\mathbf{X} \setminus F$ je otevřená množina.

otevřené:  uzavřené: 

1.4 Konvergence v normovaném lineárním prostoru

Uvažujme posloupnost bodů $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ v NLP $\mathbf{X}$.

Definice 6. Řekneme, že posloupnost $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, píšeme $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ nebo $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$ pro $k \to \infty$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$, že $\mathbf{x}_k \in U_\varepsilon(\mathbf{x})$ pro všechna $k \geq k_0$.

Definice 7. Posloupnost $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá cauchyovská, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$, že $(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m) \in U_\varepsilon(\mathbf{x})$ pro všechna $k, m \geq k_0$.

NLP $\mathbf{X}$ je Banachův prostor (také úplný NLP), jestliže každá jeho cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Jednoduchým příkladem NLP, který není úplný, je $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$, kde $\mathbb{Q}$ je množina racionálních čísel. Prostor $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor.

2 Funkce n proměnných

2.1 Definiční obor, obor hodnot, graf

Uvažujme zobrazení $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, kde $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ jsou NLP.

Pro $\mathbf{X} = \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{Y} = \mathbb{R}$ nazveme f funkcí n proměnných. Je-li $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, pak používáme značení

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(\mathbf{x}).$$

Definiční obor funkce f (značíme $\mathcal{D}(f)$) je množina všech $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pro něž existuje $y \in \mathbb{R}$, že $f(\mathbf{x}) = y$. Není-li řečeno jinak, považujeme za definiční obor funkce f množinu všech $\mathbf{x}$, pro které má $f(\mathbf{x})$ smysl.

Obor hodnot funkce f je množina všech $y \in \mathbb{R}$, že $y = f(\mathbf{x})$ pro nějaké $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(f)$.

Graf funkce f je množina všech bodů $[\mathbf{x}, f(\mathbf{x})]$ zobrazených v $\mathbb{R}^{n+1}$ s kartézským systémem souřadnic (souřadnicové osy jsou na sebe kolmé a jednotky na všech osách jsou stejné). (Je-li f „dostatečně regulární“, $n = 2$, pak grafem funkce dvou proměnných je plocha v prostoru $\mathbb{R}^3$.)

Funkce f, g jsou si rovny, tj. $f = g$, jestliže mají stejné grafy.

2.2 Spojitost funkce n proměnných v bodě

Předpokládejme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má definiční obor $\mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}^n$.

Definice 8. Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $\mathbf{a}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro každé $\mathbf{x} \in U_\delta(\mathbf{a}) \cap \mathcal{D}(f)$ platí $f(\mathbf{x}) \in U_\varepsilon\big(f(\mathbf{a})\big)$.

Poznámka 9. Na rozdíl od definice spojitosti v bodě týkající se funkce jedné proměnné zde *nepožadujeme*, aby bod $\mathbf{a}$ byl *vnitřním* bodem definičního oboru funkce f. Tento typ spojitosti se někdy přesněji nazývá spojitost vzhledem k definičnímu oboru.

Analogicky můžeme definovat lokální spojitost zobrazení $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, kde $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ jsou NLP.

Globální spojitosti, tj. spojitosti funkce na množině, se budeme věnovat později.

2.3 Hromadný bod, izolovaný bod

Definice 10. Dána neprázdná množina M v NLP $\mathbf{X}$.

- Řekneme, že bod $\mathbf{a}$ je hromadným bodem množiny M, jestliže pro každé každé prstencové okolí $P(\mathbf{a})$ platí $M \cap P(\mathbf{a}) \neq \emptyset$.
- Množinu všech hromadných bodů množiny M označíme symbolem M'.
- Bod, který není hromadným bodem, se nazývá izolovaný bod.

Hromadný bod můžeme ekvivalentně charakterizovat takto.

Věta 11. *Bod* $\mathbf{a}$ *je* hromadným bodem *množiny* M*, právě když existuje konvergentní posloupnost* $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M \setminus \{\mathbf{a}\}$*, že* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{a}$,.

2.4 Limita funkce n proměnných v bodě

Nejdříve zavedeme v $\mathbb{R}$ okolí $-\infty$ a $+\infty$.

Pro $\varepsilon > 0$ označme $U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -1/\varepsilon)$, $U_\varepsilon(+\infty) = (1/\varepsilon, +\infty)$.

Definice 12 (Cauchy)**.** Nechť $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $\mathbf{a}$ limitu A, píšeme $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = A$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $\mathbf{x} \in P_\delta(\mathbf{a}) \cap \mathcal{D}(f)$ platí $f(\mathbf{x}) \in U_\varepsilon(A)$.

To znamená, že pokud $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$, přičemž $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$, pak $f(\mathbf{x}) \to A$.

Poznámky 13. (i) Nutně musí být $P_\delta(\mathbf{a}) \cap \mathcal{D}(f) \neq \emptyset$ pro každé $\delta > 0$. To znamená, že bod $\mathbf{a}$ musí být hromadným bodem $\mathcal{D}(f)$.

(ii) Chování funkce f v bodě $\mathbf{a}$ nemá vliv na existenci ani na hodnotu limity v bodě $\mathbf{a}$.

(iii) Je-li $A \in \mathbb{R}$, jedná se o vlastní limitu. Slovo vlastní budeme většinou vynechávat. Pokud $A = -\infty$ nebo $A = +\infty$, jedná se o nevlastní limitu.

Věta 14. *Je-li* $\mathbf{a} \in \mathcal{D}(f)$ *izolovaným bodem* $\mathcal{D}(f)$*, pak je funkce* f *v tomto bodě spojitá.*

ALE: Limita funkce f v izolovaném bodě neexistuje. Pro výpočet limit (v hromadných bodech) budeme často používat následující věty.

Věta 15. *Nechť $\mathbf{a} \in \mathcal{D}(f)$ je hromadným bodem $\mathcal{D}(f)$. Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $\mathbf{a}$, právě když*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}).$$

Věta 16 (Heine)**.** *Limita $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = A$, právě když $\lim\limits_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = A$ pro každou posloupnost $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{a}$, $k \in \mathbb{N}$, a $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$.*

3 Parciální derivace 1. a 2. řádu

Uvažujme funkci f n proměnných, tj.

$$f : y = f(x_1, \dots, x_n).$$

Symbolem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

značíme parciální derivaci (prvního řádu) funkce f podle proměnné x_i. Parciální derivace funkce f podle proměnné x_i, $i \in \{1, \dots, n\}$ v bodě $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(\mathbf{a})}{h}.$$

Při praktickém výpočtu parciální derivace platí všechny vzorce a pravidla jako pro derivování funkce jedné proměnné. Proměnné, podle kterých se nederivuje, se chovají jako konstanty.

Uvažujme funkci f dvou proměnných, tj.

$$f : z = f(x, y).$$

Symbolem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, resp. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, značíme (nesmíšenou) parciální derivaci druhého řádu funkce f podle proměnné x, resp. y. Je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Pro smíšené derivace druhého řádu používáme symboly $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Tj.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$