5. Určitý integrál v $\mathbb{R}^n$

(Matematika 3)

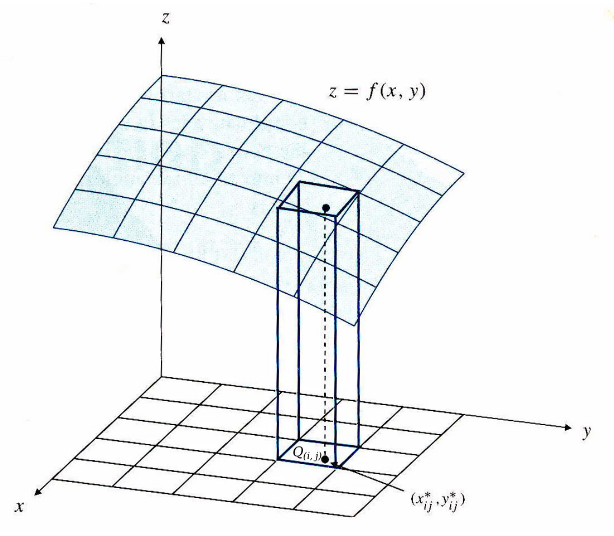
Petr Gurka

aktualizováno 21. října 2019

Obsah

1 Riemannův integrál v $\mathbb{R}^n$

1.1 Riemannův integrál na n-rozměrném kvádru



Nechť $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k < b_k$, $k = 1, \dots, n$. Definujeme n-rozměrný kvádr

$$Q = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle.$$

Každý interval $\langle a_k, b_k \rangle$, $k = 1, \dots, n$, rozdělíme dělícími body

$$a_k = x_0^k < x_1^k < \cdots < x_{m_k-1}^k < x_{m_k}^k = b_k.$$

Množinu D všech kvádrů

$$Q_{\mathbf{j}} = \langle x_{j_1-1}^1, x_{j_1}^1 \rangle \times \cdots \times \langle x_{j_n-1}^n, x_{j_n}^n \rangle, \quad k = 1, \dots, n, j_k \in \{1, \dots, m_k\},$$

kde $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_k)$, nazveme dělením Q. Definujeme průměr kvádru $Q_{\mathbf{j}}$

$$\operatorname{diam}(Q_{\mathbf{j}}) = \sqrt{(x_{j_1}^1 - x_{j_1-1}^1)^2 + \cdots + (x_{j_n}^n - x_{j_n-1}^n)^2}$$

a normu dělení D jako

$$\nu(D) = \max_{\mathbf{j}} \big(\operatorname{diam}(Q_{\mathbf{j}}) \big).$$

Nechť f je omezená na Q. Pro každý multiindex $\mathbf{j}$ definujeme čísla

$$m_{\mathbf{j}} = \inf_{\mathbf{x} \in Q_{\mathbf{j}}} f(\mathbf{x}), \qquad M_{\mathbf{j}} = \sup_{\mathbf{x} \in Q_{\mathbf{j}}} f(\mathbf{x}),$$
$$\mu(Q_{\mathbf{j}}) = (x_{j_1}^1 - x_{j_1-1}^1) \dots (x_{j_n}^n - x_{j_n-1}^n)$$

(číslo $\mu(Q_{\mathbf{j}})$ je objemem kvádru $Q_{\mathbf{j}}$). Číslo

$$s(f, D) = \sum_{\mathbf{j}} m_{\mathbf{j}}\, \mu(Q_{\mathbf{j}}), \quad \text{resp.} \quad S(f, D) = \sum_{\mathbf{j}} M_{\mathbf{j}}\, \mu(Q_{\mathbf{j}}),$$

je dolní, resp. horní, součet příslušný dělení D.

Definice 1. Nechť $\sup_{\nu(D)\to 0} s(f, D) = \inf_{\nu(D)\to 0} S(f, D) = \mathcal{I}$. Pak funkce f je riemannovsky integrovatelná na Q a její Riemannův integrál je číslo

$$\mathcal{I} = \int_Q f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Poznámky 2.

- Číslo $\mathcal{I}_1 = \sup_{\nu(D)\to 0} s(f, D)$ (resp. $\mathcal{I}_2 = \inf_{\nu(D)\to 0} S(f, D)$) se nazývá dolní (resp. horní) Riemannův integrál. V obecném případě platí pouze nerovnost $\mathcal{I}_1 \le \mathcal{I}_2$.
- Ekvivalentně lze riemannovskou integrovatelnost funkce f na Q s integrálem $\mathcal{I}$ formulovat takto:
  ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro každé dělení $D = \{Q_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}}$ (kvádru Q) s normou $\nu(D) < \delta$ a pro libovolný výběr bodů $\mathbf{x}_{\mathbf{j}} \in Q_{\mathbf{j}}$ platí $\left| \sum_{\mathbf{j}} f(\mathbf{x}_{\mathbf{j}})\, \mu(Q_{\mathbf{j}}) - \mathcal{I} \right| < \varepsilon$.

1.2 Riemannův integrál na množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

K definici Riemannova integrálu na obecnější množině zavedeme následující pojem.

Definice 3. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Definujeme charakteristickou funkci χ_M množiny M:

$$\chi_M(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } \mathbf{x} \in M, \\ 0, & \text{jestliže } \mathbf{x} \notin M. \end{cases}$$

Nutné předpoklady k definici Riemannova integrálu na obecnější množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

- množina $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená,
- funkce f je omezená na množině Ω.

Definice 4. Nechť $\Omega \subset Q$ (Q kvádr). Funkce f je riemannovsky integrovatelná na množině Ω, jestliže je funkce $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\chi_\Omega(\mathbf{x})$ riemannovsky integrovatelná na Q. Pak definujeme

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_Q F(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

- Definice je korektní, protože, jak snadno nahlédneme, nezávisí na výběru kvádru Q.
- Určitý integrál na neomezené množině zatím nedefinujeme.

1.3 Měřitelnost, míra množiny

Definice 5 (Měřitelnost, míra množiny, nulová množina)**.** Omezená množina $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá měřitelná, jestliže je funkce χ_Ω integrovatelná na Ω. Potom se číslo

$$\mu(\Omega) = \int_\Omega \mathrm{d}\mathbf{x}$$

nazývá míra množiny Ω. Množina Ω, pro kterou platí $\mu(\Omega) = 0$, se nazývá množina míry nula nebo také nulová množina.

Poznámky 6.

- Takto definovaná míra množiny se nazývá Jordanova míra (nebo také Jordanův-Peanův objem).
- Nulovými množinami jsou např.:
  - konečná množina,
  - spojitá křivka v $\mathbb{R}^n$ pro $n \geq 2$,
  - regulární dvojrozměrná plocha v $\mathbb{R}^n$ pro $n \geq 3$.

1.4 Integrovatelnost, vlastnosti integrálu

Definice 7. Řekneme, že funkce f je nulová skoro všude na Ω, píšeme $f = 0$ s.v. na Ω, jestliže existuje množina M, $\mu(M) = 0$, že $f(\mathbf{x}) = 0$ pro všechny $\mathbf{x} \in \Omega \setminus M$. Řekneme, že $f = g$ s.v. na Ω, jestliže $f - g = 0$ s.v. na Ω.

Symbolem $\mathcal{R}(\Omega)$ budeme značit množinu integrovatelných funkcí na Ω.

Věta 8 (Vlastnosti integrálu). • *Nechť $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, a $g = f$ s.v. na Ω. Potom $g \in \mathcal{R}(\Omega)$ a $\int_\Omega f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$.*

- *Nechť $f \in \mathcal{R}(\Omega_1) \cap \mathcal{R}(\Omega_2)$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Pak $f \in \mathcal{R}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ a $\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\Omega_1} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\Omega_2} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$.*

- *Množina $\mathcal{R}(\Omega)$ je vektorovým prostorem a integrál je lineárním funkcionálem na tomto vektorovém prostoru, tj. platí $\int_\Omega \big(\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})\big)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \alpha \int_\Omega f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \beta \int_\Omega g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$.*

Označme symbolem $\mathfrak{N}$ systém jordanovsky měřitelných množin. Platí:

- Je $\emptyset \in \mathfrak{N}$, $Q \in \mathfrak{N}$.
- Pro $M \in \mathfrak{N}$ je $\mu(M) \geq 0$, přičemž $\mu(\emptyset) = 0$.
- Pro $M, N \in \mathfrak{N}$ je $M \cap N, N \cup N, M \setminus N \in \mathfrak{N}$.
- Jsou-li $M, N \in \mathfrak{N}$ disjunktní, tj. $M \cap N = \emptyset$, pak $\mu(M \cup N) = \mu(M) + \mu(N)$.

Nejdůležitějšími jordanovsky měřitelnými množinami v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ jsou:

- $A = \{\,(x,y)\,;\; x \in \langle a,b\rangle, g(x) \leq y \leq f(x)\,\}$, kde f, g jsou funkce spojité na $\langle a,b\rangle$ takové, že $g \leq f$ na $\langle a,b\rangle$ (měřitelná v $\mathbb{R}^2$),
- $B = \{\,(x,y,z)\,;\; (x,y) \in F, g(x,y) \leq z \leq f(x,y)\,\}$, kde F je uzavřená měřitelná množina v $\mathbb{R}^2$, f, g jsou funkce spojité na F takové, že $g \leq f$ na F (měřitelná v $\mathbb{R}^3$).

Další jordanovsky měřitelné jsou množiny, které lze z těchto množin získat pomocí konečných sjednocení, průniků nebo množinových rozdílů, případně přidáním nebo odebráním nulových množin.

Věta 9 (Riemannovská integrovatelnost). *Je-li funkce f spojitá na jordanovsky měřitelné množině Ω, potom $f \in \mathcal{R}(\Omega)$.*

- Riemannův určitý integrál je možné rozšířit na obecnější systém funkcí a vybudovat tak teorii určitého Lebesgueova integrálu.
- Systém měřitelných množin, který dostaneme pomocí Lebesgueova integrálu, je mnohem bohatší. Obsahuje tzv. borelovské množiny, mezi které patří všechny otevřené a uzavřené množiny (i neomezené) a také všechny spočetné průniky a spočetná sjednocení takových množin.
- Je-li funkce f lebesgueovsky měřitelná (tj. úrovňová množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\,;\; f(\mathbf{x}) > \alpha\}$ je měřitelná pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$) a nezáporná s.v. (ve smyslu Lebesgueovy míry) na (lebesgueovsky) měřitelné množině Ω, pak existuje Lebesgueův určitý integrál $L = \int_\Omega f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$. Je $L \geq 0$, přičemž může být také $L = \infty$. Pokud $L < \infty$, říkáme, že funkce f je lebesgueovsky integrovatelná.
- Obecnou f rozložíme $f = f^+ - f^-$ (na kladnou a zápornou část). Pak $\int_\Omega f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega f^+(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Omega f^-(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$, je-li aspoň jedno z čísel vpravo konečné. Lebesgueův integrál konverguje absolutně (tj. $\int_\Omega |f(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\mathbf{x} < \infty$).

2 Výpočet vícerozměrného integrálu

Zaměříme se především na způsob výpočtu, takže budeme předpokládat, že všechny určité integrály existují (ve vhodném smyslu).

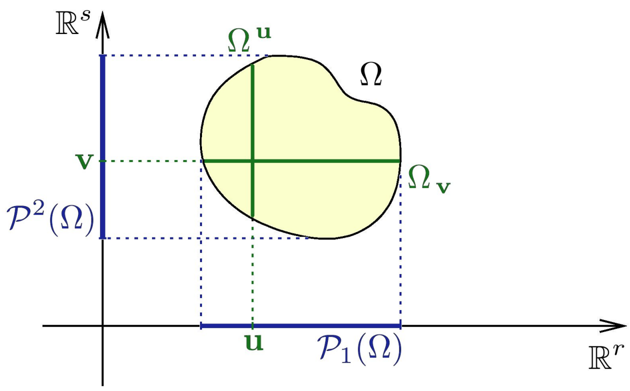
2.1 Fubiniova věta

Dána měřitelná množina $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$, $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \Omega$, kde $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^s$. Definujeme množiny

$$\Omega^{\mathbf{u}} = \{\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^s \,;\, (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \Omega \,\},\ \Omega_{\mathbf{v}} = \{\, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^r \,;\, (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \Omega \,\} \quad \text{(řezy)}$$
$$\mathcal{P}_1(\Omega) = \{\, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^r \,;\, \Omega^{\mathbf{u}} \neq \emptyset \,\},\ \mathcal{P}^2(\Omega) = \{\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^s \,;\, \Omega_{\mathbf{v}} \neq \emptyset \,\} \quad \text{(průměty).}$$

Věta 10 (Fubini)**.** *Nechť funkce f je integrovatelná na měřitelné množině Ω v $\mathbb{R}^n$. Potom*

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}x = \int_{\mathcal{P}_1(\Omega)} \Big(\int_{\Omega^{\mathbf{u}}} f(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, \mathrm{d}\mathbf{v} \Big)\, \mathrm{d}\mathbf{u} = \int_{\mathcal{P}^2(\Omega)} \Big(\int_{\Omega_{\mathbf{v}}} f(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, \mathrm{d}\mathbf{u} \Big)\, \mathrm{d}\mathbf{v}.$$



Věta umožňuje výpočet vícerozměrných integrálů pomocí vícenásobných. Používá se také k výpočtu jednorozměrných integrálů pomocí záměny pořadí integrace.

2.2 Věta o substituci

Nechť Ω je otevřená množina v $\mathbb{R}^n$. Zobrazení $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ se nazývá regulární, jestliže všechny jeho parciální derivace 1. řádu jsou spojité na Ω a Jacobiho determinant

$$J_\Phi(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{ve všech } \mathbf{x} \in \Omega.$$

Věta 11 (o substituci)**.** *Nechť Φ je prosté a regulární zobrazení Ω_1 na Ω_2 (tj. $\Phi(\Omega_1) = \Omega_2$), kde Ω_1, Ω_2 jsou otevřené množiny v $\mathbb{R}^n$. Potom*

$$\int_{\Omega_2} f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\Omega_1} f(\mathbf{u})\, |J_\Phi(\mathbf{u})|\, \mathrm{d}\mathbf{u},$$

má-li jedna ze stran rovnosti smysl.

2.3 Důležité substituce v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$

Polární souřadnice v $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} x &= r\cos t, \\ y &= r\sin t, \end{aligned} \qquad r \in (0,\infty), t \in (0,2\pi), \quad |J| = r$$

Zobecněné polární souřadnice v $\mathbb{R}^2$

Nechť $a, b \in (0,\infty)$ jsou pevně zvolené parametry.

$$\begin{aligned} x &= ra\cos t, \\ y &= rb\sin t, \end{aligned} \qquad r \in (0,\infty), t \in (0,2\pi), \quad |J| = abr$$

Cylindrické souřadnice v $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} x &= r\cos t, \\ y &= r\sin t, \\ z &= z, \end{aligned} \qquad r \in (0,\infty), t \in (0,2\pi), \quad |J| = r$$

Sférické souřadnice v $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} x &= r\cos t\, \sin u, \\ y &= r\sin t\, \sin u, \\ z &= r\cos u, \end{aligned} \qquad r \in (0,\infty), t \in (0,2\pi), u \in (0,\pi), \quad |J| = r^2 \sin u$$

Zobecněné sférické souřadnice v $\mathbb{R}^3$

Nechť $a, b, c \in (0,\infty)$ jsou pevně zvolené parametry.

$$\begin{aligned} x &= ra\cos t\, \sin u, \\ y &= rb\sin t\, \sin u, \\ z &= rc\cos u, \end{aligned} \qquad r \in (0,\infty), t \in (0,2\pi), u \in (0,\pi), \quad |J| = abcr^2 \sin u$$