6. Aplikace určitého integrálu v $\mathbb{R}^n$

(Matematika 3)

Petr Gurka

aktualizováno 3. listopadu 2020

Obsah

1 Výpočet jednorozměrného určitého integrálu pomocí dvojného

Příklad 1. Vypočítejme integrál

$$\mathcal{I}(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x}\,\mathrm{d}x, \quad a,b > 0, a > b.$$

Použijeme dvojný integrál

$$\iint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in (0,\infty), y \in (b,a)\}.$$

Výsledek:

$$\mathcal{I}(a,b) = \tfrac{\pi}{2}\,\ln\tfrac{a}{b}.$$

Příklad 2. Vypočítejme integrál

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

Použijeme rovnost

$$\Big(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\Big)^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Výsledek (pomocí substituce do polárních souřadnic):

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\pi \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{I} = \sqrt{2\pi}.$$

2 Další aplikace

Nechť $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, funkce $\rho : \Omega \to \langle 0, \infty)$ je *hustota*, $n = 2, 3$.

- obsah, objem: $\mu(\Omega) = \int_\Omega \, \mathrm{d}\mathbf{x}$
- hmotnost: $m(\Omega) = \int_\Omega \rho(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}$
- statický moment k ose x_i: $M_{x_i}(\Omega) = \int_\Omega x_j \, \rho(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}$, $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$
- statický moment k rovině $x_j x_k$: $M_{x_j x_k}(\Omega) = \int_\Omega x_i \, \rho(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}$, $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ navzájem různé
- těžiště (pro $n = 2$): $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\quad a_i = \frac{M_{x_j}(\Omega)}{m(\Omega)}$, $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$
- těžiště (pro $n = 3$): $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\quad a_i = \frac{M_{x_j x_k}(\Omega)}{m(\Omega)}$, $i = 1, 2, 3$
- moment setrvačnosti k ose x_i: $J_{x_i}(\Omega) = \int_\Omega (x_j^2 + x_k^2) \rho(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}$, $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ navzájem různé

2.1 Obsah rovinného útvaru

Příklad 3. Vypočítejme obsah množiny

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 < y < x + 2\}.$$

Výsledek:

$$\mu(\Omega) = \iint_\Omega \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{9}{2}.$$

2.2 Objem tělesa v $\mathbb{R}^3$

Příklad 4. Vypočítejme objem množiny

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

Výsledek:

$$\mu(\Omega) = \iiint_\Omega \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \frac{1}{6}.$$

2.3 Těžiště v $\mathbb{R}^2$

Příklad 5. Vypočítejme souřadnice těžiště hmotné rovinné desky A ohraničené křivkami

$$y = 1 - x^2, \quad x = 0, \quad y = 0,$$

je-li její hustota $\rho(x, y) = y$.

Výsledek:

$$M_x(A) = \iint_A y^2 \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{16}{105}, \quad M_y(A) = \iint_A xy \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{1}{12},$$

$$m(A) = \iint_A y \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{4}{15}, \quad T = [\tfrac{5}{16}, \tfrac{4}{7}].$$