7. Lineární diferenciální rovnice

(Matematika 3)

Petr Gurka

aktualizováno 7. listopadu 2019

Obsah

1 Diferenciální rovnice

1.1 Diferenciální rovnice 1. řádu, klasické řešení

Za diferenciální rovnici považujeme rovnici, v níž neznámou je funkce. Navíc daná rovnice obsahuje derivace neznámé funkce a případně i samotnou neznámou funkci. Je zvykem v takové rovnici značit neznámou funkci (proměnné x) symbolem y, derivace neznámé funkce pak symboly y', y'' atd.

Příklad 1. Jednoduchým příkladem diferenciální rovnice 1. řádu je rovnice

$$y' = f(x). \tag{1}$$

Řešením této rovnice je každá primitivní funkce $y = F(x)$ k funkci f na vhodném intervalu $\mathcal{J}$.

Jedná se o diferenciální rovnici

$$y' = \mathcal{F}(x, y), \tag{2}$$

kde $\mathcal{F}(x, y)$ je daná funkce dvou proměnných.

Definice 2 (Klasické řešení diferenciální rovnice). Řekneme, že funkce φ definovaná na otevřeném intervalu (a, b), je *řešením diferenciální rovnice* (2) *na intervalu* (a, b), jestliže ve všech bodech $x \in (a, b)$ má vlastní derivaci $\varphi'(x)$ a pro každé $x \in (a, b)$ platí rovnost

$$\varphi'(x) = \mathcal{F}\big(x, \varphi(x)\big).$$

(Pojem řešení je možné zavést na uzavřeném nebo polouzavřeném intervalu, potom v krajních bodech uvažujeme příslušné jednostranné derivace.)

1.2 Cauchyova úloha

Definice 3. Pojem *Cauchyova úloha* (nebo také počáteční úloha) pro diferenciální rovnici (2) označuje úlohu

$$\begin{cases} y' &= \mathcal{F}(x, y), \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

Jejím řešením je funkce φ, která je (klasickým) řešením diferenciální rovnice a splňuje *počáteční podmínku*

$$\varphi(x_0) = y_0,$$

(nutně $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$, tj. $\mathcal{F}(x_0, y_0)$ má smysl). Jinými slovy, jedná se o řešení φ, jehož graf prochází bodem (x_0, y_0).

1.3 Zobecněné řešení

Ve většině praktických úloh není nutné, aby na funkci, která je řešením, byly kladeny tak silné požadavky, tj. diferencovatelnost ve všech bodech a platnost příslušné rovnosti ve všech bodech.

Příklad 4. Klasickým řešením diferenciální rovnice (1), tj. $y' = f(x)$, s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$ je funkce

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{3}$$

kde určitý integrál je *Newtonův* určitý integrál. V tomto případě je řešením φ právě ta primitivní funkce k funkci f, která splňuje podmínku $\varphi(x_0) = y_0$, tj. její graf prochází bodem (x_0, y_0). Je-li funkce f nespojitá, pak klasické řešení nemusí existovat. Např. pro funkci $f(x) = 0$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 1$, neexistuje klasické řešení na žádném intervalu obsahující bod 0. Tento problém odstraníme např. tak, že místo Newtonova určitého integrálu budeme uvažovat *Riemannův* určitý integrál. Požadovaná rovnost $\varphi'(x) = f(x)$ pak bude splněna ve všech bodech s výjimkou bodu 0.

1.4 Separovatelná rovnice

$$y' = f(x)\,g(y). \tag{4}$$

Algoritmus

1. Derivaci y' zapíšeme ve tvaru $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, získanou rovnost formálně vynásobíme symbolem $\mathrm{d}x$, vydělíme ji výrazem $g(y)$ a k oběma stranám připíšeme symbol $\int$:
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)\,g(y) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Vypočítáme-li neurčité integrály na obou stranách, dostaneme
$$G(y) = F(x) + C,$$
odkud pak vyjádříme y pomocí x, tj.
$$\varphi : y = G^{-1}\big(F(x) + C\big).$$

3. Výslednou funkci φ dosadíme do rovnice (4) a určíme, na kterém intervalu je řešením rovnice (4).

4. Má-li funkce g nulový bod x_0, tj. $g(x_0) = 0$, je konstantní funkce
$$\varphi_s : y = x_0$$
také řešením rovnice (4) na každém intervalu $(a, b) \subset \mathcal{D}(f)$.

1.5 Lineární rovnice

Jedná se o rovnici, kterou lze upravit na tvar
$$y' - a(x)\,y = b(x). \tag{5}$$
Nejdříve vyřešíme rovnici bez pravé strany, tj. rovnici
$$y' = a(x)\,y,$$
což je rovnice řešitelná separací proměnných. Jejím obecným řešením je funkce
$$y = c\,u_1(x), \tag{6}$$
kde c je libovolná reálná *konstanta*.

Pro nalezení obecného řešení rovnice (5), které má tvar $y = c\,u_1(x) + v(x)$, použijeme metodu variace konstanty, která spočívá v tom, že ho hledáme ve tvaru odvozeného z (6)
$$y = \mathbf{k}(x)\,u_1(x),$$
kde $\mathbf{k}(x)$ je *funkce* proměnné x.

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu s konstantními koeficienty

Jedná se o rovnici

$$Ay' + By = \mathcal{R}(x), \quad A, B \in \mathbb{R}, A \neq 0 \text{ (konstanty)}. \tag{7}$$

Rovnice bez pravé strany

$$Ay' + By = 0 \tag{8}$$

má řešení $y = c\,u_1(x)$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta a $u_1(x)$ je nenulová funkce. Hledáme-li $u_1(x)$ ve tvaru $u_1(x) = e^{kx}$, dostaneme ze (8) algebraickou rovnici (tzv. charakteristickou rovnici) s neznámou k

$$Ak + B = 0.$$

Tedy obecné řešení rovnice (8) je $y = c\,e^{-\frac{B}{A}x}$.

Obecné řešení rovnice (7) má tvar

$$y = c\,u_1(x) + v(x) = c\,e^{-\frac{B}{A}x} + v(x),$$

kde $v(x)$ je jedno (pevné) řešení rovnice (7). Pro speciální pravou stranu $\mathcal{R}(x)$ lze toto řešení nalézt metodou „neurčitých koeficientů“.

2 Lineární diferenciální rovnice řádu n

2.1 Rovnice, klasické řešení rovnice

Lineární diferenciální rovnice řádu n je rovnice

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = \mathcal{R}(x), \tag{9}$$

kde, $n \in \mathbb{N}$, $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y'$ jsou derivace neznámé funkce y (proměnné x), $a_1, a_2, \ldots, a_n, \mathcal{R}$ jsou dané funkce (proměnné x).

Jsou-li funkce $a_1, a_2, \ldots, a_n$ konstantní, hovoříme o diferenciální rovnici s konstantními koeficienty.

Definice 5 (Klasické řešení)**.** Funkci φ nazveme řešením rovnice (9) na intervalu (α, β), jestliže má vlastní derivace φ', φ'', $\ldots$, $\varphi^{(n)}$ ve *všech* bodech intervalu (α, β) a

$$\varphi^{(n)}(x) + a_1(x)\,\varphi^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\,\varphi'(x) + a_n(x)\,\varphi(x) = \mathcal{R}(x)$$

ve *všech* $x \in (\alpha, \beta)$.

2.2 Existence a jednoznačnost řešení

Platnost následující věty o existenci a jednoznačnosti řešení lineární diferenciální rovnice vysvětlíme v souvislosti se soustavou lineárních rovnic 1. řádu

Věta 6. *Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n, \mathcal{R}$ jsou funkce spojité na intervalu (α, β). Nechť čísla $s \in (\alpha, \beta)$ a $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ jsou libovolná.*

Potom má Cauchyova úloha pro diferenciální rovnici (9) *s počátečními podmínkami*

$$\varphi(s) = y_0, \quad \varphi'(s) = y_1, \quad \ldots, \quad \varphi^{(n-1)}(s) = y_{n-1} \tag{10}$$

jediné řešení φ na intervalu (α, β).

2.3 Tvar obecného řešení

Důsledek 7 (Tvar obecného řešení lineární rovnice). *Nechť* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \mathcal{R}$ *jsou spojité funkce na intervalu* (α, β). *Každé řešení* φ *nehomogenní rovnice* (9) *má tvar*

$$\varphi = u + v, \tag{11}$$

kde u *je řešení homogenní lineární rovnice*

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0 \tag{12}$$

a v *je (pevné) řešení rovnice* (9). *Obecné řešení* u *homogenní lineární rovnice* (12) *na* (α, β) *má tvar*

$$u(x) = c_1\, u_1(x) + c_2\, u_2(x) + \cdots + c_n\, u_n(x), \tag{13}$$

kde $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *jsou lineárně nezávislá řešení rovnice* (12) *na intervalu* (α, β) *(tj. pokud* $u(x) = 0$ *ve všech* $x \in (\alpha, \beta)$, *pak* $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$*) a* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *jsou libovolné reálné konstanty.*

Strategie nalezení obecného řešení lineární diferenciální rovnice
Vždy postupujeme ve dvou krocích:

1. Vyřešíme homogenní lineární diferenciální rovnici (12), tj. nalezneme její obecné řešení (13).
2. Nalezneme (uhodneme) jedno řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice (9). (Uhodnout řešení lze, jedná-li se o rovnici s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou.)

Poznámka 8. Řešení homogenní lineární diferenciální rovnici s *konstantními koeficienty* hledáme ve tvaru $y = e^{kx}$. Dostaneme tak algebraickou rovnici řádu n s neznámou k (tzv. charakteristickou rovnici).

3 Lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

Jedná se o rovnici:

$$A\, y'' + B\, y' + C\, y = \mathcal{R}(x), \tag{14}$$

kde $A, B, C \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, jsou konstanty a $\mathcal{R}$ je funkce proměnné x.

3.1 Řešení homogenní lineární rovnice

Nejdříve určíme řešení $u(x) = c_1\, u_1(x) + c_2\, u_2(x)$ (typu (13)) příslušné *homogenní rovnice*

$$A\, y'' + B\, y' + C\, y = 0. \tag{15}$$

Uvažujme kvadratickou rovnici (*charakteristickou rovnici*)

$$A\, k^2 + B\, k + C = 0. \tag{16}$$

Nechť $D = B^2 - 4AC$ je *diskriminant* rovnice (16).

- Je-li $D > 0$, rovnice (16) má dva různé reálné kořeny k_1, k_2. Pak

$$u_1(x) = e^{k_1 x}, \quad u_2(x) = e^{k_2 x}.$$

- Je-li $D = 0$, rovnice (16) má jeden dvojnásobný reálný kořen k. Pak

$$u_1(x) = e^{k x}, \quad u_2(x) = x\, e^{k x}.$$

- Je-li $D < 0$, potom má rovnice (16) dva různé komplexně sdružené kořeny $k_1 = p + i\,q$, $k_2 = p - i\,q$. Pak

$$u_1(x) = e^{p x} \cos(q\,x), \quad u_2(x) = e^{p x} \sin(q\,x).$$

3.2 Řešení nehomogenní rovnice metodou neurčitých koeficientů

Obecné řešení $\varphi = u + v$ (typu (11)) nehomogenní rovnice (14) budeme hledat pro *speciální pravou stranu*

$$\mathcal{R}(x) = e^{a x} \big(\mathcal{P}_1(x) \cos(b\,x) + \mathcal{P}_2(x) \sin(b\,x)\big), \tag{17}$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ jsou polynomy stupně nejvýše m.

Partikulární řešení v *nehomogenní rovnice* (14) s pravou stranou tvaru (17) budeme hledat ve tvaru

$$v(x) = x^r\, e^{a x} \big(\mathcal{Q}_1(x) \cos(b\,x) + \mathcal{Q}_2(x) \sin(b\,x)\big), \tag{18}$$

kde r je násobnost kořene $k = a + i\,b$ v charakteristické rovnici (16),

$$A\,k^2 + B\,k + C = 0,$$

a $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ jsou polynomy stupně m.

Potom (viz (11))

$$\varphi = u + v = c_1\,u_1 + c_2\,u_2 + v.$$

3.3 Řešení nehomogenní rovnice metodou variace konstant

Řešení φ nehomogenní rovnice (i s nekonstantními koeficienty)

$$a_0(x)\; y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = \mathcal{R}(x), \tag{19}$$

(kde $a_0(x)$ je nenulová funkce) hledáme ve tvaru

$$\varphi(x) = c_1(x)\,u_1(x) + c_2(x)\,u_2(x), \tag{20}$$

kde c_1, c_2 nejsou konstanty, ale funkce proměnné x.

Derivování funkce φ a následné dosazení do nehomogenní rovnice (19) vede na soustavu dvou lineárních rovnic s neznámými $c_1'(x)$, $c_2'(x)$,

$$\begin{array}{rcrcl} c_1'(x)\,u_1(x) & + & c_2'(x)\,u_2(x) & = & 0, \\ c_1'(x)\,u_1'(x) & + & c_2'(x)\,u_2'(x) & = & \mathcal{R}(x)/a_0(x). \end{array} \tag{21}$$

Soustavu (s neznámými $c_1'(x)$, $c_2'(x)$) můžeme vyřešit Cramerovým pravidlem. Integrováním pak vypočítáme funkce $c_1(x)$, $c_2(x)$, které dosadíme do (20). Determinant soustavy

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix}$$

se nazývá *Wronského determinant.*