8. Soustava lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu

(Matematika 3)

Petr Gurka

aktualizováno 19. listopadu 2019

Obsah

1 Základní pojmy **1**
- 1.1 Zápis soustavy v maticovém tvaru 1
- 1.2 Existence a jednoznačnost řešení 2
- 1.3 Tvar řešení 2
- 1.4 Fundamentální systém, fundamentální matice 2
- 1.5 Souvislost rovnice řádu n se soustavou 1. řádu 3
- 1.6 Náznak důkazu věty o existenci řešení 4

2 Metoda variace konstant pro soustavu **5**
- 2.1 Princip metody 5
- 2.2 Vzorec pro řešení Cauchyovy úlohy 5

1 Základní pojmy

1.1 Zápis soustavy v maticovém tvaru

Nechť $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ je interval a funkce $a_{ij}, b_i : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, jsou spojité na $\mathcal{I}$. Uvažujeme *soustavu lineárních diferenciálních rovnic*

$$\begin{array}{rcl} y_1' = a_{11}(x)\, y_1 + a_{12}(x)\, y_2 + & \dots & + a_{1n}(x)\, y_n + b_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)\, y_1 + a_{22}(x)\, y_2 + & \dots & + a_{2n}(x)\, y_n + b_2(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)\, y_1 + a_{n2}(x)\, y_2 + & \dots & + a_{nn}(x)\, y_n + b_n(x) \end{array}.$$

Budeme ji zapisovat pomocí maticového zápisu

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{A}(x)\, \mathbf{y} + \mathbf{b}(x), \tag{1}$$

kde $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ je *vektor neznámých*, $\mathbf{b}(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$ je daný *vektor pravých stran* (oba vektory uvažujeme zapsány ve sloupci), $\boldsymbol{A}(x)$ je daná matice:

$$\boldsymbol{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Soustava

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\mathbf{y}, \tag{2}$$

se nazývá *homogenní soustava* lineárních diferenciálních rovnic nebo také soustava lineárních diferenciálních rovnic *bez pravé strany.*

Pokud je matice $\boldsymbol{A}$ konstantní, tj. funkce a_{ij}, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, nezávisí na x, nazýváme soustavu (1) soustavou *s konstantními koeficienty*:

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{A}\,\mathbf{y} + \mathbf{b}(x).$$

Doplníme-li soustavu (1) *počáteční podmínkou*

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{w}, \tag{3}$$

kde $s \in \mathcal{I}$, a $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ je daný bod v $\mathbb{R}^n$, hovoříme o *Cauchyově úloze* (případně *počáteční úloze*) pro diferenciální rovnici (1) s počáteční podmínkou (3).

1.2 Existence a jednoznačnost řešení

Definice 1. Řešením soustavy (1) na intervalu $\mathcal{I}$ nazveme takovou (vektorovou) funkci $\mathbf{y}$ proměnné x, která má derivaci v každém bodě intervalu $\mathcal{I}$ a ve všech bodech tohoto intervalu splňuje rovnici (1). (Pokud interval $\mathcal{I}$ obsahuje některých z krajních bodů uvažujeme v tomto bodě příslušnou jednostrannou derivaci.)

Věta 2. *Nechť $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ je interval a funkce $a_{ij}, b_i : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, jsou spojité na $\mathcal{I}$. Potom pro každé $s \in \mathcal{I}$, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ má Cauchyova úloha* (1) *s počáteční podmínkou* (3) *jediné řešení* $\mathbf{y}$ *na intervalu $\mathcal{I}$.*

1.3 Tvar řešení

Důsledek 3.

- *Množina všech řešení* $\mathbf{u}$ *homogenní soustavy* (2) *tvoří vektorový prostor dimenze n. Tj.*

$$\mathbf{u} = c_1\,\mathbf{u}^{[1]} + \cdots + c_n\,\mathbf{u}^{[n]}, \tag{4}$$

  kde $c_1, \dots, c_n$ jsou libovolné reálné konstanty a $\mathbf{u}^{[1]}, \dots, \mathbf{u}^{[n]}$ *jsou lineárně nezávislá řešení homogenní soustavy* (2).

- *Množina všech řešení* $\mathbf{y}$ *nehomogenní soustavy* (1) *tvoří afinní prostor dimenze n. Tj.*

$$\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = c_1\,\mathbf{u}^{[1]} + \cdots + c_n\,\mathbf{u}^{[n]} + \mathbf{v}, \tag{5}$$

  kde $\mathbf{u}$ *je řešení homogenní soustavy* (2) *a* $\mathbf{v}$ *je jedno (pevné) řešení nehomogenní soustavy* (1).

1.4 Fundamentální systém, fundamentální matice

Definice 4. Vektory $\mathbf{u}^{[1]}, \dots, \mathbf{u}^{[n]}$ (viz (4)) tvoří bázi vektorového prostoru řešení homogenní soustavy (2). Tato báze se nazývá *fundamentální systém* řešení soustavy (2). Matice, jejíž sloupce tvoří vektory fundamentálního systému, tj. matice

$$\boldsymbol{U}(x) = \big(\mathbf{u}^{[1]}(x)\ \dots\ \mathbf{u}^{[n]}(x)\big), \tag{6}$$

se nazývá *fundamentální matice* řešení soustavy (2).

Obecné řešení $\mathbf{u}(x)$ homogenní soustavy (2) můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{u}(x) = \boldsymbol{U}(x)\,\mathbf{c}, \tag{7}$$

kde vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ uvažujeme jako sloupcový (viz (4)). Analogicky, obecné řešení $\mathbf{y}(x)$ nehomogenní soustavy (1) můžeme zapsat ve tvaru (viz (5))

$$\mathbf{y}(x) = \boldsymbol{U}(x)\,\mathbf{c} + \mathbf{v}(x).$$

1.5 Souvislost rovnice řádu n se soustavou 1. řádu

Položíme-li v rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = \mathcal{R}(x)$$

$$y = y_1, \quad y' = y_1' = y_2, \quad \ldots \quad , y^{(n-1)} = y_{(n-1)}' = y_n, \quad y^{(n)} = y_n',$$

a označíme-li

$$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) = (y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

dostaneme soustavu

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \ldots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathcal{R}(x) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Fundamentální matice homogenní soustavy příslušné k soustavě (8) je

$$\boldsymbol{W}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \ldots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \ldots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \ldots & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Poznámka 5. Je také možný opačný postup. Pro výpočet řešení soustavy je možné převést soustavu na rovnici vyššího řádu a tu pak vyřešit. Uvedeme pro jednoduchost pro konkrétní soustavu 2×2 s konstantními koeficienty.

Uvažujme soustavu

$$\begin{array}{rrcl} y_1' = & 3y_1 & + & y_2 \\ y_2' = & -4y_1 & - & y_2 \end{array}.$$

Z první rovnice je $y_2 = y_1' - 3y_1$ a $y_2' = y_1'' - 3y_1'$. Dosazením do druhé rovnice po úpravě dostaneme

$$y_1'' - 2y_1' + y_1 = 0.$$

Určíme řešení $y_1 = c_1 e^x + c_2 x e^x$ a následně $y_2 = -2c_1 e^x + c_2(e^x - 2xe^x)$.

Tedy fundamentální matice je

$$\boldsymbol{U}(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ -2e^x & e^x - 2xe^x \end{pmatrix}$$

(Tato metoda se nazývá eliminační.)

1.6 Náznak důkazu věty o existenci řešení

Naznačíme důkaz Věty 2. Předpokládejme, že $\mathcal{I} = \langle 0, \infty)$ a uvažujme nehomogenní rovnici (1) s počáteční podmínkou (3) v nule, tj.

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\mathbf{y} + \mathbf{b}(x), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{w}.$$

Přepsáním do integrálního tvaru dostaneme

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{w} + \int_0^x \boldsymbol{A}(t)\,\mathbf{y}(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x \mathbf{b}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{9}$$

K důkazu existence řešení rovnice (9) použijeme *metodu postupných aproximací*. Volíme rekurentně:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_1(x) &= \mathbf{w} + \int_0^x \mathbf{b}(t)\,\mathrm{d}t, \\
\mathbf{y}_{j+1}(x) &= \mathbf{w} + \int_0^x \boldsymbol{A}(t)\,\mathbf{y}_j(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x \mathbf{b}(t)\,\mathrm{d}t, \quad j = 2, 3, \dots .
\end{aligned}$$

Ukážeme, že existuje funkce $\mathbf{y}$, že $\mathbf{y}(x) = \lim\limits_{j\to\infty} \mathbf{y}_j(x)$ (lokálně stejnoměrně na $\langle 0, \infty)$) a následně, že $\mathbf{y}$ vyhovuje rovnici (9) (pomocí limitních přechodů v integrálech). Nechť $M(x) = \max\limits_{t\in\langle 0,x\rangle} \|\mathbf{y}_1(t)\|$, $\|\boldsymbol{B}\| = \sup\limits_{\mathbf{v}\neq\mathbf{o}} \frac{\|\boldsymbol{B}\,\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}$ (norma matice $\boldsymbol{B}$). Zvolme $x \in (0, \infty)$ pevně. Nejdříve dokážeme bodovou konvergenci v bodě x. Z důkazu pak ihned vyplyne lokální stejnoměrná konvergence na intervalu $\langle 0, x\rangle$. Pro důkaz konvergence je důležitý odhad

$$\|\mathbf{y}_{j+1}(x) - \mathbf{y}_j(x)\| \le \frac{M(x)}{j!}\Big(\int_0^x \|\boldsymbol{A}(t)\|\,\mathrm{d}t\Big)^j, \quad j = 1, 2, \dots , \tag{10}$$

z něhož (pro $j, \ell \in \{1, \dots\}$) plyne

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{y}_{j+\ell}(x) - \mathbf{y}_j(x)\| &\le \|\mathbf{y}_{j+\ell}(x) - \mathbf{y}_{j+\ell-1}(x)\| + \dots + \|\mathbf{y}_{j+1}(x) - \mathbf{y}_j(x)\| \\
&\le M(x)\Big(\frac{\big(\int_0^x \|\boldsymbol{A}(t)\|\,\mathrm{d}t\big)^{j+\ell-1}}{(j+\ell-1)!} + \dots + \frac{\big(\int_0^x \|\boldsymbol{A}(t)\|\,\mathrm{d}t\big)^{j}}{j!}\Big).
\end{aligned}$$

Vpravo v závorce je zbytek konvergentní řady $\exp\big(\int_0^x \|\boldsymbol{A}(t)\|\,\mathrm{d}t\big)$. Odsud plyne, že posloupnost $\{\mathbf{y}_j(x)\}_j$ je Cauchyovská a tedy konvergentní.

K odvození odhadu (10) jsme použili

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{y}_2(x) - \mathbf{y}_1(x)\| &\le \int_0^x \|\boldsymbol{A}(t)\,\mathbf{y}_1(t)\|\,\mathrm{d}t \\
&\le \int_0^x \|\boldsymbol{A}(t)\|\,\|\mathbf{y}_1(t)\|\,\mathrm{d}t \le M(x)\int_0^x \|\boldsymbol{A}(t)\|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

a, díky tomu, že M je neklesající, platí pro $j = 2$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{y}_3(x) - \mathbf{y}_2(x)\| &\le \int_0^x \|\boldsymbol{A}(t)\|\,\|\mathbf{y}_2(t) - \mathbf{y}_1(t)\|\,\mathrm{d}t \\
&\le \int_0^x \|\boldsymbol{A}(t)\|\,\Big(M(t)\int_0^t \|\boldsymbol{A}(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}t \\
&\le M(x)\int_0^x \|\boldsymbol{A}(t)\|\,\Big(\int_0^t \|\boldsymbol{A}(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{M(x)}{2}\Big(\int_0^x \|\boldsymbol{A}(t)\|\,\mathrm{d}t\Big)^2.
\end{aligned}$$

Pro $j \ge 3$ odvodíme (10) podobně indukcí.

2 Metoda variace konstant pro soustavu

2.1 Princip metody

Metoda variace konstant pro soustavu (1), $\mathbf{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$, je podobná jako u rovnice 1. řádu. Předpokládejme, že příslušná homogenní soustava (2), $\mathbf{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\mathbf{y}$, má fundamentální maticí $\boldsymbol{U}(x)$ (viz (6)), tj. platí

$$\boldsymbol{U}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{U}(x). \tag{11}$$

Víme, že vektorová funkce $\mathbf{u}$ je řešením homogenní soustavy (2), právě když platí (7), $\mathbf{u}(x) = \boldsymbol{U}(x)\,\mathbf{c}$, kde $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ je pevně zvolený vektor z $\mathbb{R}^n$. Řešení nehomogenní rovnice (1) budeme hledat ve tvaru

$$\mathbf{y}(x) = \boldsymbol{U}(x)\,\mathbf{c}(x), \tag{12}$$

kde $\mathbf{c}(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x))$ je vektorová funkce proměnné x.
Potom derivováním (12) dostaneme

$$\mathbf{y}'(x) = \boldsymbol{U}'(x)\mathbf{c}(x) + \boldsymbol{U}(x)\mathbf{c}'(x). \tag{13}$$

Dosazením (12) a (13) do (1) vyjde

$$\boldsymbol{U}'(x)\,\mathbf{c}(x) + \boldsymbol{U}(x)\,\mathbf{c}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{U}(x)\,\mathbf{c}(x) + \mathbf{b}(x).$$

Odsud vzhledem k (11) získáme rovnost

$$\boldsymbol{U}(x)\,\mathbf{c}'(x) = \mathbf{b}(x) \tag{14}$$

(porovnejte s (13) z přednášky 8 pro rovnici řádu n). Z věty o existenci a jednoznačnosti řešení plyne, že matice $\boldsymbol{U}(x)$ je regulární pro každé $x \in \mathcal{I}$, tedy má inverzní matici $\boldsymbol{U}^{-1}(x)$. Dostáváme

$$\mathbf{c}'(x) = \boldsymbol{U}^{-1}(x)\,\mathbf{b}(x). \tag{15}$$

Je také možné $c_1'(x), \dots, c_n'(x)$ spočítat z (14) pomocí Cramerova pravidla. Vektorovou funkci $\mathbf{c}(x)$ pak určíme následnou integrací.

2.2 Vzorec pro řešení Cauchyovy úlohy

Uvažujme Cauchyovu úlohu (1), (3), tj.

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\mathbf{y} + \mathbf{b}(x), \quad \mathbf{y}(s) = \mathbf{w}.$$

Integrováním (15) dostaneme

$$\mathbf{c}(x) = \int_s^x \boldsymbol{U}^{-1}(t)\,\mathbf{b}(t)\,\mathrm{d}t + \mathbf{c}_0.$$

Tedy podle (12)

$$\mathbf{y}(x) = \boldsymbol{U}(x) \int_s^x \boldsymbol{U}^{-1}(t)\,\mathbf{b}(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{U}(x)\,\mathbf{c}_0$$

a z počáteční podmínky je $\mathbf{w} = \boldsymbol{U}(s)\,\mathbf{c}_0$, tj. $\mathbf{c}_0 = \boldsymbol{U}^{-1}(s)\,\mathbf{w}$. Po dosazení konečně dostáváme vzorec

$$\mathbf{y}(x) = \boldsymbol{U}(x)\boldsymbol{U}^{-1}(s)\,\mathbf{w} + \int_s^x \boldsymbol{U}(x)\boldsymbol{U}^{-1}(t)\,\mathbf{b}(t)\,\mathrm{d}t.$$