9. Soustava s konstantní maticí

(Matematika 3)

Petr Gurka

aktualizováno 24. listopadu 2019

Obsah

1 Homogenní soustava

1.1 Maticová exponenciála

Hledáme fundamentální matici $\boldsymbol{Y}$ homogenní soustavy

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{A}\,\mathbf{y}, \tag{1}$$

která splňuje počáteční podmínku $\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{E}$ (jednotková matice), tj. $\mathbf{y}^{[i]}(0) = \mathbf{e}_i$, $i = 1, \dots, n$, kde $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ je kanonická báze v $\mathbb{R}^n$. Máme $\boldsymbol{Y}'(x) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{Y}(x)$, což je $\boldsymbol{Y}(x) = \boldsymbol{E} + \int_0^x \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{Y}(t)\,\mathrm{d}t$. Použijeme metodu postupných aproximací

$$\boldsymbol{Y}_1(x) = \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{Y}_{j+1}(x) = \boldsymbol{E} + \int_0^x \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{Y}_j(t)\,\mathrm{d}t,\ j = 1, 2, \dots .$$

Pak $\quad \boldsymbol{Y}_j(x) = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}\,x + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2\,x^2 + \cdots + \frac{1}{j!}\boldsymbol{A}^j\,x^j$, tedy

$$\boldsymbol{Y}(x) = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}\,x + \tfrac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2\,x^2 + \cdots = \exp\left(\boldsymbol{A}\,x\right) \quad \text{(maticová exponenciála).}$$

Je-li $\boldsymbol{A}$ diagonální matice s diagonálními prvky $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak $\exp\left(\boldsymbol{A}\,x\right)$ je diagonální s diagonálními prvky $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$.

1.2 Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice 1. Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (n,n) a nechť existuje nenulový vektor $\mathbf{v}$ a (reálné nebo komplexní) číslo λ tak, že

$$\boldsymbol{A}\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}. \tag{2}$$

Číslo λ se nazývá *vlastní číslo* matice $\boldsymbol{A}$, vektor $\mathbf{v}$ se nazývá *vlastní vektor* příslušný vlastnímu číslu λ.

Rovnice (2) je ekvivalentní s homogenní maticovou rovnicí

$$\big(\boldsymbol{A} - \lambda\,\boldsymbol{E}\big)\,\mathbf{v} = \mathbf{o}$$

(kde $\boldsymbol{E}$ je jednotková matice), která má řešení $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ pro nějaké λ, právě když

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det\big(\boldsymbol{A} - \lambda\,\boldsymbol{E}\big) = 0. \tag{3}$$

Vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ tedy vypočítáme jako nulové body polynomu $\mathcal{P}(\lambda)$, tzv. *charakteristického polynomu* matice $\boldsymbol{A}$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, $r \in \mathbb{N}$, navzájem různé (reálné nebo komplexní) nulové body polynomu $\mathcal{P}(\lambda)$, pak platí rozklad

$$\mathcal{P}(\lambda) = a(\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{n_r},$$

kde $a \neq 0$, $n_1 + \cdots n_r = n$. Číslo n_i tedy udává násobnost nulového bodu λ_i, $i = 1, \dots, r$, charakteristického polynomu $\mathcal{P}$. Dále nás může zajímat dimenze podprostoru, který je tvořen všemi vlastními vektory příslušnými vlastnímu číslu λ_i, $i = 1, \dots, r$.

Definice 2. Nechť λ je vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$. Číslo $n_a(\lambda)$ udávající násobnost nulového bodu λ charakteristického polynomu $\mathcal{P}$ se nazývá *algebraická násobnost vlastního čísla* λ. Číslo $n_g(\lambda)$ udávající dimenzi podprostoru tvořeného všemi vlastními vektory příslušnými vlastnímu číslu λ se nazývá *geometrická násobnost vlastního čísla* λ.

Věta 3. *Nechť λ je vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$. Pak platí*

$$n_g(\lambda) \leq n_a(\lambda).$$

1.3 Řešení homogenní soustavy, Jordanovy buňky

Použijeme lineární substituci $\mathbf{y} = \boldsymbol{P}\,\mathbf{u}$, kde $\boldsymbol{P}$ je vhodná regulární matice typu (n,n). Pak $\mathbf{y}' = \boldsymbol{P}\,\mathbf{u}'$ a dosazením za $\mathbf{y}$ a $\mathbf{y}'$ do rovnice (1) vyjde

$$\boldsymbol{P}\,\mathbf{u}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\,\mathbf{u} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{u}' = \boldsymbol{J}\,\mathbf{u},$$

kde $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ je blokově diagonální Jordanova matice. Tj.

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{\lambda_1,r_1} & & & \\ & \boldsymbol{J}_{\lambda_2,r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_{\lambda_m,r_m} \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{J}_{\lambda_i,r_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Matice $\boldsymbol{J}_{\lambda_i,r_i}$ (Jordanovy buňky) jsou čtvercové typu (r_i, r_i), λ_i jsou vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $r_1 + \cdots + r_m = n$.

Jordanova matice $\boldsymbol{J}$ je k matici $\boldsymbol{A}$ určena jednoznačně až na pořadí Jordanových buněk.

1.4 Jordanova matice diagonální

1. Je-li geometrická i algebraická násobnost vlastního čísla *stejná* a je rovna číslu k, náleží tomuto vlastnímu číslu právě k jednočlenných Jordanových buněk.

2. Mají-li tedy všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ stejné algebraické i geometrické násobnosti, je matice $\boldsymbol{J}$ diagonální s vlastními čísly na hlavní diagonále (orientovanými z levého horního rohu).

Soustava $\mathbf{u}' = \boldsymbol{J}\,\mathbf{u}$ má pak tvar

$$\begin{array}{lcl} u_1' = \lambda_1 u_1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ u_n' = & & \lambda_n u_n \end{array} .$$

Matice podobnosti $\boldsymbol{P}$ je tvořena sloupci vlastních vektorů příslušných $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (orientace zleva doprava). Fundamentální matice soustavy $\mathbf{y}' = \boldsymbol{A}\,\mathbf{y}$ pak je

$$\boldsymbol{Y}(x) = \boldsymbol{P} \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ (včetně násobností).

1.5 Jordanova matice nediagonální, řetězce přidružených vlastních vektorů

Pokud je aritmetická násobnost vlastního čísla λ matice $\boldsymbol{A}$ *větší* než geometrická odpovídá vlastnímu číslu λ Jordanova buňka $\boldsymbol{J}_{\lambda,r}$ typu (r, r), kde $r \geq 2$. Soustava $\mathbf{u}' = \boldsymbol{J}_{\lambda,r}\,\mathbf{u}$, tj. soustava

$$\begin{array}{lllll} u_1' & = \lambda u_1 & + \; u_2 & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ u_{r-1}' & = & & \lambda u_{r-1} \; + & u_r \\ u_r' & = & & & \lambda u_r \end{array} ,$$

má fundamentální matici

$$\boldsymbol{U}_{\lambda,r}(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} & \cdots & \frac{1}{(r-1)!} x^{r-1} e^{\lambda x} \\ 0 & e^{\lambda x} & \cdots & \frac{1}{(r-2)!} x^{r-2} e^{\lambda x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda x} \end{pmatrix}.$$

Rozebereme situaci, kdy vlastní číslo λ matice $\boldsymbol{A}$ má aritmetickou násobnost větší než geometrickou.

Definice 4. Řekneme, že vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ tvoří řetězec přidružených vlastních vektorů příslušný vlastnímu číslu λ, jestliže jsou splněny rovnice:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\mathbf{v}_1 = \mathbf{o}, (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1, \dots, (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_{r-1}. \tag{4}$$

Všimněme si, že vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ jsou lineárně nezávislé.

- Každé Jordanově buňce odpovídá právě jeden vlastní vektor $\mathbf{v}_1$.
- Je-li aritmetická násobnost vlastního čísla λ větší než geometrická, pak k některým jeho vlastním vektorům existují řetězce přidružených vlastních vektorů.
- Součet délek všech řetězců příslušných jednomu vlastnímu číslu λ je roven jeho aritmetické násobnosti.

Nechť

$$\boldsymbol{P} = \left(\boldsymbol{P}_{\lambda_1,r_1} \dots \boldsymbol{P}_{\lambda_m,r_m}\right), \quad \boldsymbol{P}_{\lambda_i,r_i} = \left(\mathbf{v}_1^{\lambda_i}, \dots, \mathbf{v}_{r_i}^{\lambda_i}\right), i = 1, \dots, m,$$

kde $\mathbf{v}_1^{\lambda_i}, \dots, \mathbf{v}_{r_i}^{\lambda_i}$ je řetězec přidružených vlastních vektorů příslušný vlastnímu číslu λ_i. Potom fundamentální matice $\boldsymbol{Y}(x)$ soustavy (1) je

$$\boldsymbol{Y}(x) = \boldsymbol{P} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{\lambda_1,r_1}(x) & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{U}_{\lambda_m,r_m}(x) \end{pmatrix},$$

kde $\boldsymbol{U}_{\lambda_i,r_i}(x)$ je fundamentální matice soustavy $\mathbf{u}' = \boldsymbol{J}_{\lambda_i,r_i}\mathbf{u}$, $i = 1, \dots, m$.

2 Nehomogenní soustava

2.1 Metoda neurčitých koeficientů

Dána soustava

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{A}\,\mathbf{y} + \mathbf{R}(x) \tag{5}$$

s pravou stranou

$$\mathbf{R}(x) = e^{ax}(\mathbf{P}_1(x)\cos(bx) + \mathbf{P}_2(x)\sin(bx)), \tag{6}$$

kde $\boldsymbol{A}$ je konstantní matice typu (n, n), $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ jsou vektorové polynomy stupně nejvýše m, $m \in \{0, 1, \dots\}$.

Řešení $\mathbf{y}$ soustavy (5) má, jak známo, tvar $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, kde $\mathbf{u}$ je řešení homogenní soustavy (1), $\mathbf{v}$ je (jedno pevné) řešení soustavy (5). Podobně jako u rovnice řádu n lze $\mathbf{v}$ hledat ve tvaru

$$\mathbf{v}(x) = x^r e^{ax}(\mathbf{Q}_1(x)\cos(bx) + \mathbf{Q}_2(x)\sin(bx)),$$

kde $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ jsou vektorové polynomy stupně m, $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ je násobnost kořene $\lambda = a + i\,b$ charakteristické rovnice $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = 0$.

2.2 Metoda variace konstant

Poznamenejme pouze, že metodu variace konstant (z přednášky 8), která je univerzální, použijeme při řešení soustavy s konstantní maticí v případě, že pravá strana $\mathbf{R}$ nemá speciální tvar (6).