10. Laplaceova transformace

(Matematika 3)

Petr Gurka

aktualizováno 8. listopadu 2019

Obsah

1 Laplaceova transformace

1.1 Definice

Nechť Λ je množina všech měřitelných funkcí $f : \langle 0, \infty) \to \mathbb{R}$, pro které existují konstanty $k = k(f)$ a $K > 0$ takové, že

$$|f(t)| \leq K\, e^{kt}, \quad t \in \langle 0, \infty).$$

V případě potřeby dodefinujeme funkci f nulou na intervalu $(-\infty, 0)$, tedy je možné předpokládat, že funkce f je definovaná na $\mathbb{R}$. Funkci $f \in \Lambda$ nazýváme časovou funkcí.

Definice 1. Pro $f \in \Lambda$ definujeme

$$\widetilde{f}(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t, \quad p > k(f). \tag{1}$$

Funkce $\widetilde{f}$ se nazývá Laplaceův obraz funkce f.

Místo $\widetilde{f}$ píšeme $\mathscr{L} f$, případně $\mathscr{L}\{f(t)\}$, také $\mathscr{L} f(p)$ nebo $\mathscr{L}\{f(t)\}(p)$, je-li nutné zdůraznit závislost na proměnné p.

Poznámky

- Transformace $\mathscr{L}$ je dobře definovaná, tj. (Lebesgueův) integrál v (1) existuje pro každé $p > k(f)$.

- Ve většině aplikací vystačíme s funkcemi f, které jsou po částech spojité, tj. na každém omezeném intervalu mají nejvýše konečný počet bodů nespojitosti, přičemž v každém z těchto bodů mají obě vlastní jednostranné limity. Pak integrál v (1) existuje jako Riemannův, přičemž $\int_0^\infty \cdots = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \cdots$.
- V plné obecnosti je Laplaceův obraz $\widetilde{f}(p)$ definován pro každé komplexní číslo p takové, že $Re\,(p) > k(f)$. Tedy Laplaceovým obrazem reálné funkce f reálné proměnné t je komplexní funkce $\widetilde{f}$ komplexní proměnné p.
- Proměnnou funkce f budeme vždy značit t, proměnnou jejího obrazu $\widetilde{f}$ budeme vždy značit p. Budeme uvažovat pouze reálná čísla p.

1.2 Základní vlastnosti Laplaceovy transformace

(i) Linearita:
$\mathscr{L}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha\mathscr{L}\{f\} + \beta\mathscr{L}\{g\} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f, g \in \Lambda)$

(ii) Pravidlo o podobnosti:
$\mathscr{L}\{f(at)\}(p) = \frac{1}{a}\,\widetilde{f}\left(\frac{p}{a}\right) \qquad (a > 0)$

(iii) Posunutí v obraze:
$\mathscr{L}\{f(t)\,e^{at}\}(p) = \widetilde{f}(p-a) \qquad (p > a + k(f))$

(iv) Posunutí ve vzoru:
$\mathscr{L}\{f(t-b)\}(p) = e^{-b\,p}\,\widetilde{f}(p)$

(v) Pravidlo o derivaci obrazu:
$\mathscr{L}\{-t\,f(t)\}(p) = \widetilde{f}'(p)$

(vi) Pravidlo o derivaci vzoru (pro 1. derivaci):
$\mathscr{L}\{f'(t)\}(p) = p\,\widetilde{f}(p) - \lim_{t\to 0^+} f(t)$

(vii) Pravidlo o derivaci vzoru (pro n-tou derivaci):
$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\}(p) = p^n\widetilde{f}(p) - \sum_{j=1}^n p^{n-j}\big(\lim\limits_{t\to 0^+} f^{(j-1)}(t)\big)$

(viii) Pravidlo o integrálu vzoru:
$\mathscr{L}\{\,\int_0^t f\}(p) = \frac{1}{p}\,\widetilde{f}(p)$

Příklady

Příklad 2. $\mathscr{L}\{\chi_{\langle 0,\infty)}\}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p}$.

Příklad 3. $\mathscr{L}\{t\}(p) = \int_0^\infty t\,e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p^2}$.

Příklad 4. Nechť $b > 0$, pak $\chi_{\langle b,\infty)}(t) = \chi_{\langle 0,\infty)}(t-b)$ a podle (iv) $\mathscr{L}\{\chi_{\langle b,\infty)}\}(p) = e^{-b\,p}\mathscr{L}\{\chi_{\langle 0,\infty)}\}(p) = \frac{1}{p}e^{-b\,p}$.

Příklad 5. Pomocí (iii) je $\mathscr{L}\{e^{a\,t}\}(p) = \mathscr{L}\{e^{a\,t}\chi_{\langle 0,\infty)}\}(p) = \frac{1}{p-a}$.

2 Nalezení obrazů a vzorů

2.1 Tabulka

Výčet nejdůležitějších Laplaceových obrazů nejdeme v následující tabulce. Symbolem n značíme přirozené číslo, symboly a, b značíme reálné parametry.

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\}(p)$	$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\}(p)$
1	$\frac{1}{p}$	t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$t^n\, e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{(p-a)}$	$\sin(at)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$t\,\sin(at)$	$\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$
$t\,\cos(at)$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\sin^2(at)$	$\frac{2a^2}{p(p^2+4a^2)}$
$\cos^2(at)$	$\frac{p^2+2a^2}{p(p^2+4a^2)}$	$e^{at}\,\sin(bt)$	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$
$e^{at}\,\cos(bt)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,p^{-3/2}$

2.2 Konvoluce

Pro $f, g \in \Lambda$ definujeme konvoluci $f * g$ předpisem

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)\,g(t-s)\,\mathrm{d}s.$$

Platí

$$\begin{aligned} f * g &= g * f \\ (f*g)*h &= f*(g*h) \\ \mathscr{L}\{f*g\} &= \mathscr{L}\{f\}\,\mathscr{L}\{g\} \qquad (2) \end{aligned}$$

Příklad 6. Víme, že $\mathscr{L}\{\chi_{\langle 0,\infty)}\}(p) = \frac{1}{p}$, $\mathscr{L}\{\sin\}(p) = \frac{1}{p^2+1}$. Pro $\widetilde{f}(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}$ je podle (2) $f(t) = (\chi_{\langle 0,\infty)} * \sin)(t) = \int_0^t \sin(t-s)\,\mathrm{d}s = \cos t - 1$.

2.3 Jednoznačnost

Laplaceova transformace je „téměř prostá“. Toto formulujeme v následující větě.

Věta 7 (Lerch)**.** *Nechť $f, g \in \Lambda$ a nechť existuje číslo $c \in \mathbb{R}$ takové, že $\widetilde{f}(p) = \widetilde{g}(p)$ pro každé $p \in (c,\infty)$. Potom $f(t) = g(t)$ skoro všude (ve smyslu Lebesgueovy míry).*

Poznámka 8. Uvažujeme-li Laplaceovu transformaci pouze na množině funkcí po částech spojitých, pak Věta 7 říká, že pokud jsou Laplacovy obrazy dvou funkcí stejné, pak vzory se mohou na každém omezeném intervalu lišit pouze na konečné množině bodů.