11. Použití Laplaceovy transformace na řešení diferenciálních rovnic

(Matematika 3)

Petr Gurka

aktualizováno 8. listopadu 2019

Obsah

1 Zpětná Laplaceova transformace

1.1 Vzor (předmět) k racionální funkci

Používáme značení $\mathscr{L}\{f(t)\}(p) = F(p)$. Předpokládejme, že $F(p)$ je racionální lomená funkce, tj.

$$F(p) = \frac{\mathcal{P}(p)}{\mathcal{Q}(p)}, \quad \text{kde } \mathcal{P}, \mathcal{Q} \text{ jsou polynomy.}$$

Z vlastnosti Laplaceovy transformace

$$\lim_{p \to \infty} F(p) = 0$$

plyne, že stupeň polynomu $\mathcal{P}$ v čitateli je vždy menší než stupeň polynomu $\mathcal{Q}$ ve jmenovateli funkce F.

Obecný postup

Funkci $F(p)$ rozložíme na součet parciálních zlomků a pro nalezení vzoru (předmětu) pak použijeme tabulku.

Příklad 1. Najděme $f(t)$ pro $F(p) = \dfrac{3p^2+5}{(p+1)(p+3)^2}$.

Řešení.

- Provedeme rozklad $F(p) = \dfrac{2}{p+1} - \dfrac{16}{(p+3)^2} + \dfrac{1}{p+3}$.

- Pomocí tabulky pak vyjde $f(t) = 2e^{-t} + e^{-3t}(1 - 16t)$.

$\square$

Heavisideův vzorec (jednoduché nulové body jmenovatele)

Ve speciálním případě je možné rozklad na parciální zlomky a následně předmět, tj. funkci f, nalézt rychleji. Předpokládejme, že polynom $\mathcal{Q}$ ve jmenovateli funkce F má pouze jednoduché nulové body, tj.

$$\mathcal{Q}(p) = a(p - p_1)(p - p_2) \cdots (p - p_n),$$

kde $a \neq 0$ a čísla $p_1, \dots, p_n$ jsou navzájem různá, $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$F(p) = \frac{\mathcal{P}(p)}{\mathcal{Q}(p)} = \frac{k_1}{p - p_1} + \frac{k_2}{p - p_2} + \cdots + \frac{k_n}{p - p_n}, \tag{1}$$

kde

$$k_j = \frac{\mathcal{P}(p_j)}{\mathcal{Q}'(p_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{2}$$

V tomto případě platí tzv. *Heavisideův vzorec*

$$f(t) = k_1\, e^{p_1 t} + k_2\, e^{p_2 t} + \cdots + k_n\, e^{p_n t}. \tag{3}$$

Důkaz Hevisideova vzorce. Stačí odvodit vzorec pro koeficienty (2). Vztah (1) plyne z věty o rozkladu racionální lomené funkce na parciální zlomky a vzorec (3) pak snadno dostaneme pomocí tabulky pro Laplaceovu transformaci.

Zvolme pevně $j \in \{1, \dots, n\}$. Vynásobením rovnosti (1) výrazem $(p - p_j)$ dostaneme

$$\mathcal{P}(p)\frac{p - p_j}{\mathcal{Q}(p)} = k_j + \Big(\frac{p - p_j}{p - p_1}k_1 + \cdots + \frac{p - p_j}{p - p_{j-1}}k_{j-1} + \frac{p - p_j}{p - p_{j+1}}k_{j+1} + \cdots + \frac{p - p_j}{p - p_n}k_n\Big).$$

Nyní provedeme v poslední rovnosti limitní přechod $p \to p_j$. Výraz v závorce na pravé straně má limitu rovnou nule, jelikož se díky předpokladu $p_j \neq p_i$ pro $j \neq i$ jedná o funkci spojitou v bodě $p = p_j$, která v tomto bodě nabývá hodnotu 0. Dostaneme tak

$$k_j = \lim_{p \to p_j} \Big(\mathcal{P}(p)\frac{p - p_j}{\mathcal{Q}(p)}\Big). \tag{4}$$

Funkce $\mathcal{P}$ je spojitá v bodě p_j (protože je to polynom), $\lim_{p \to p_j}(p - p_j) = 0$, $\lim_{p \to p_j} \mathcal{Q}(p) = \mathcal{Q}(p_j) = 0$, ale $\lim_{p \to p_j} \mathcal{Q}'(p) = \mathcal{Q}'(p_j) \neq 0$ (protože p_j je jednoduchý nulový bod polynomu $\mathcal{Q}$). Použitím l'Hospitalova pravidla pro výpočet limity v (4) ihned dostaneme (2). $\square$

1.2 Zpětná transformace obrazu impulsu

Příklad 2. Najděme $f(t)$ pro $F(p) = \dfrac{1}{p^2}e^{-2p} + \dfrac{1}{p}e^{-3p}$.

Řešení. Pomocí tabulky ihned vyjde

$$f(t) = (t - 2)\chi_{\langle 0,\infty)}(t - 2) + \chi_{\langle 0,\infty)}(t - 3),$$

což lze zapsat jako

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \le t \le 2 \\ t-2 & \text{pro } 2 < t \le 3 \\ t-1 & \text{pro } t > 3 \end{cases}.$$

□

2 Řešení diferenciálních rovnic pomocí Laplaceovy transformace

2.1 Diferenciální rovnice 2. řádu

Příklad 3. Řešme rovnici $y'' + 2y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$

Řešení. Aplikujeme na rovnici Laplaceovu transformaci (značíme $Y = \mathscr{L}\{y\}(p)$). Vyjde: $\mathscr{L}\{y''\}(p) = p^2\mathscr{L}\{y\}(p) - p\,y(0) - y'(0) = p^2Y - p - 1$. Podobně $\mathscr{L}\{y'\}(p) = pY - 1$, $\mathscr{L}\{e^{-t}\}(p) = \frac{1}{p+1}$.

Tedy $p^2Y - p - 1 + 2(pY - 1) + 2Y = \frac{1}{p+1}$.

Po úpravě

$$Y = \frac{p^2 + 4p + 4}{(p+1)(p^2 + 2p + 2)} = \frac{1}{p+1} + \frac{2}{(p+1)^2 + 1}.$$

Výsledek: $y = e^{-t} + 2e^{-t}\sin t$.

□

Obecný postup

Uvažujme Cauchyovu úlohu

$$\begin{aligned} &a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(t), \\ &y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \end{aligned}$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, $a \neq 0$.

Provedením Laplaceovy transformace a použitím její linearity

$$a(p^2Y - p\,y_0 - y_1) + b(pY - y_0) + cY = F(p).$$

Po úpravě

$$Y = \frac{1}{ap^2 + bp + c}F(p) + \frac{ay_0\,p + (ay_1 + by_0)}{ap^2 + bp + c} = R_1(p)F(p) + R_2(p).$$

Tedy

$$y = (\mathscr{L}^{-1}\{R_1\} * f)(t) + \mathscr{L}^{-1}\{R_2\}(t).$$

2.2 Soustava diferenciálních rovnic 1. řádu

Obecný postup

Uvažujme Cauchyovu úlohu s konstantní maticí $\boldsymbol{A}$

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{A}\,\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{w}.$$

Použitím Laplaceovy transformace dostaneme

$$p\mathbf{Y}(p) - \mathbf{y}(0) = \boldsymbol{A}\mathbf{Y}(p) + \mathbf{B}(p),$$

kde $\mathbf{Y} = \mathscr{L}\{\mathbf{y}\}$, $\mathbf{B} = \mathscr{L}\{\mathbf{b}\}$. Pak

$$\mathbf{Y}(p) = (p\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}\big(\mathbf{B}(p) + \mathbf{w}\big).$$

Poznámka 4. Fundamentální matici $\boldsymbol{U}(t)$ soustavy $\mathbf{u}' = \boldsymbol{A}\,\mathbf{u}$, která splňuje podmínku $\boldsymbol{U}(0) = \boldsymbol{E}$, lze vyjádřit vzorcem

$$\boldsymbol{U}(t) = \mathscr{L}^{-1}\big\{(p\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}\big\}(t). \tag{5}$$

Stačí si totiž uvědomit, že $\mathbf{B}(p) = \mathbf{o}$, neboť $\mathbf{b}(t) = \mathbf{o}$, a za $\mathbf{w}$ dosadíme jednotkovou matici $\boldsymbol{E}$.

Příklady

Příklad 5. Pomocí vzorce (5) nalezněme fundamentální matici soustavy

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{u}.$$

Řešení. Je $(p\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} p-2 & -1 & 0 \\ 0 & p-2 & -1 \\ 0 & 0 & p-2 \end{pmatrix}$. Potom

$$(p\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p-2} & \frac{1}{(p-2)^2} & \frac{1}{(p-2)^3} \\ 0 & \frac{1}{p-2} & \frac{1}{(p-2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{p-2} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{U}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 6. Pomocí vzorce (5) nalezněme fundamentální matici soustavy

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{u}.$$

Řešení. Je

$$(p\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p-3} & \frac{-2}{(p-3)(p-2)} & \frac{5}{(p-3)(p-2)} - \frac{2}{(p-3)(p-2)^2} \\ 0 & \frac{1}{p-2} & \frac{1}{(p-2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{p-2} \end{pmatrix}$$

a

$$\boldsymbol{U}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & -2e^{3t} + 2e^{2t} & 3e^{3t} - 4e^{2t} + 2te^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

□