

6. DVOJNÉ A TROJNÉ INTEGRÁLY
 CVIČENÍ Z MATEMATIKY 3 (DOPORUČENÉ ÚLOHY)

1. FUBINIOVA VĚTA

Vhodným použitím Fubiniovy věty vypočítejte následující integrály.

Základní úlohy.

- 1) $\iint_{\substack{3 \leq x \leq 4 \\ 1 \leq y \leq 2}} \frac{dx dy}{(x+y)^2}$ 2) $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} x e^{x+y} dx dy$
- 3) $\iint_{\substack{2 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 2}} \frac{dx dy}{(1-xy)^2}$ 4) $\iiint_{0 \leq x, y, z \leq 1} e^{3x+2y+z} dx dy dz$
- 5) $\iiint_{\Omega} xy^2 z dx dy dz, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3, 1 \leq z \leq 2\}$
- 6) $\iiint_{\Omega} y^2 z \cos x dx dy dz, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$

Zkouškové úlohy.

- 7) $\iint_{y^2 \leq x \leq y+2} y e^x dx dy$ 8) $\iint_{0 \leq y \leq x \leq \pi} \cos(x+y) dx dy$
- 9) $\iint_{\Omega} e^{y^2} dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$
- 10) $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy\}$
- 11) $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{1+x+z}, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 5, 2 \leq z \leq 4\}$
- 12) $\iiint_{\Omega} x dx dy, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq x+y\}$

Obtížnější úlohy.

- 13) $\iint_{\Omega} \frac{x dx dy}{x^2 + y^2}, \quad \Omega$ ohraničená křivkami $x = 2, y = x, x = 2y$
- 14) $\iint_{\Omega} x^2(y-x) dx dy, \quad \Omega$ ohraničená křivkami $y = x^2, x = y^2$
- 15) $\iiint_{\Omega} xy dx dy dz, \quad \Omega$ ohraničená plochami $z = xy, x + y = 1$ a $x, y, z \geq 0$
- 16) $\iiint_{\Omega} y \cos(z+x) dx dy dz, \quad \Omega$ ohraničená plochami $y = \sqrt{x}, y = 0, z = 0, x + z = \frac{\pi}{2}$

Výsledky.

- | | | |
|--|--|----------------------|
| 1) $\ln \frac{25}{24}$ | 2) $e - 1$ | 3) $\ln \frac{6}{5}$ |
| 4) $\frac{1}{6}(e^3 - 1)(e^2 - 1)(e - 1)$ | 5) 26 | 6) 0 |
| 7) $\frac{e}{2}(5 + e^3)$ | 8) -2 | 9) $\frac{e-1}{2}$ |
| 10) $\frac{1}{64}$ | 11) $3 \ln \left(\frac{3^9}{4 \cdot 5^5} \right)$ | 12) $\frac{1}{8}$ |
| 13) $2\left(\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{1}{2}\right)$ | 14) $\frac{1}{504}$ | 15) $\frac{1}{180}$ |
| 16) $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$ | | |

2. VĚTA O SUBSTITUCI

Zkouškové úlohy. Pomocí vhodné substituce vypočítejte následující integrály.

- 1) $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (4x^2y^3 - x + 5) \, dx dy$ 2) $\iint_{x^2+y^2 \leq 4} (2 - \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx dy$
- 3) $\iiint_{\Omega} (3 + 2xy) \, dx dy dz, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

Obtížnější úlohy.

- 4) $\iint_{\Omega} xy^2 \, dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + (y - 1)^2 \geq 1, x^2 + (y - 2)^2 \leq 4\}$
- 5) $\iiint_{\Omega} z^2 \, dx dy dz, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$

Výsledky.

- 1) 5π 2) $\frac{8}{3}\pi$ 3) 16π 4) $\frac{125}{4}$ 5) $\frac{59}{480}\pi$