3. DERIVACE VE SMĚRU, TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL, TEČNÁ ROVINA A NORMÁLA GRAFU

CVIČENÍ Z MATEMATIKY 3 (DOPORUČENÉ ÚLOHY)

1. Diferenciál, derivace ve směru, gradient

Základní úlohy. 1) Je dána funkce $f(x,y)=\operatorname{arctg}(xy)$. Určete diferenciál $\mathbf{v}\mapsto D_{\mathbf{v}}f(1,1)$ a derivaci ve směru $\dfrac{\partial f}{\partial\mathbf{v}}(1,1)$, je-li $\mathbf{v}=(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2})$.

2) Vypočítejte derivaci funkce $f(x,y)=x^2+y^2+xy$ v bodě $\mathbf{a}=(3,1)$ ve směru vektoru od bodu $\mathbf{a}$ do bodu $\mathbf{b}=(6,5)$.

Obtížnější úlohy. 3) Rozhodněte, zda funkce $f(x,y,z)=5x^2y-7xy^2z+5xyz^2$ v bodě $\mathbf{a}=(1,1,1)$ ve směru $(8,4,8)$ klesá nebo roste.

U následujících funkcí rozhodněte, zda jsou diferencovatelné v bodě $(0,0)$. Výsledek zdůvodněte. Pokud totální diferenciál existuje, vypočítejte ho.

$$4)\quad f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}\qquad 5)\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pro } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{pro } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$6)\ f(x,y)=\begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)} & \text{pro } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{pro } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

7) Vypočítejte parciální derivace (pokud existují) $\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)$, $\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)$ pro

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^3+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{pro } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Dále vypočítejte $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ a zjistěte, zda je tato funkce spojitá v bodě $(0,0)$.

8) Pomocí totálního diferenciálu vypočítejte přibližně hodnotu $\ln\big(\sqrt[3]{1,03}+\sqrt[4]{0,98}-1\big)$.

9) Ve kterém bodě je gradient funkce $f(x,y)=\ln\big(x+\frac1y\big)$ roven vektoru $(1,-\frac{16}{9})$?

10) Vypočítejte derivaci funkce $f(x,y)=3x^2-6xy+y^2$ v bodě $\mathbf{a}=(-\frac13,-\frac12)$ ve směru libovolného vektoru $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ a rozhodněte, ve kterém směru je derivace největší, ve kterém nejmenší a ve kterém nulová.

Výsledky. 1) $D_{(v_1,v_2)}f(1,1)=\frac12v_1+\frac12v_2$, $\dfrac{\partial f}{\partial\mathbf{v}}(1,1)=\sqrt2/2$ 2) $41/5$

3) Funkce roste.

4) Není, protože slabý diferenciál není lineární.

5) Není, protože neplatí stejnoměrná aproximace diferenciálem.

6) Je, $D_{(v_1,v_2)}f(0,0)=0$, $(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$.

7) $\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)=0$, $\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)$ neexistuje, $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=3x^2\sin\frac{1}{x^2+y^2}-2\frac{x(x^3+y)}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$ není spojitá v $(0,0)$.

8) Pro $f(x,y)=\ln\big(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1\big)$ je $D_{(v_1,v_2)}f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\Big(\dfrac{v_1}{\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{v_2}{4\sqrt[4]{y^3}}\Big)$ totální diferenciál v okolí bodu $(1,1)$, tedy $f(1,03;0,98)$ je přibližně $0,005$.

9) V bodech $(\frac73,-\frac34)$, $(-\frac13,\frac34)$.

10) Je $\nabla f(-\frac13,-\frac12)=(1,1)$, $\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}f(-\frac13,-\frac12)=v_1+v_2$ (připomeňme, že $\|\mathbf{v}\|=1$). Derivace ve směru je největší ve směru gradientu, tj. pro $\mathbf{v}=(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2})$, kdy je rovna $\sqrt2$, je nejmenší ve směru opačném ke gradientu, tj. pro $\mathbf{v}=(-\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2})$, kdy je rovna $-\sqrt2$, je nulová pro $\mathbf{v}=(\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2})$ a pro $\mathbf{v}=(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2})$.

2. Derivování implicitní funkce

V následujících úlohách vypočítejte první derivaci funkce $y = y(x)$, která je určená implicitně příslušnou rovnicí, v daném bodě $\mathbf{a}$.

1) $x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x + 3y - 2 = 0,\ \mathbf{a} = (2, 2)$, 2) $x^2 \sin y - \cos y + \cos 2y = 0,\ \mathbf{a} = (-1, \frac{\pi}{2})$,

3) $x - y - \operatorname{arctg} y = 0, \quad \mathbf{a} = (0, 0)$, 4) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1,\ \mathbf{a} = (2, -\frac{2\sqrt{5}}{3})$.

5) Vypočítejte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $z = z(x, y)$ zadané rovnicí $x+y+z^2 = e^z$ v bodě $(2, -1, 0)$.

Výsledky.

1) $\frac{4}{5}$ 2) 2 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{4\sqrt{5}}{15}$

5) $\frac{\partial z}{\partial x}(2, -1) = 1,\ \frac{\partial z}{\partial y}(2, -1) = 1,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2, -1) = 1,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2, -1) = 1,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2, -1) = 1$

3. Tečná rovina a normála

Základní úlohy. 1) Stanovte rovnici tečné roviny plochy $z = x^2+y^2$ v jejím bodě $\mathbf{a} = (1, 2, z_{\mathbf{a}})$.

2) Stanovte rovnici tečné roviny a normály plochy $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ v jejím bodě $\mathbf{a} = (1, 1, z_{\mathbf{a}})$.

Zkouškové úlohy. 3) Stanovte rovnici tečné roviny a normály plochy $z = ye^{4x-2y}$ v jejím bodě $\mathbf{a} = (1, 2, z_{\mathbf{a}})$.

4) Stanovte rovnici tečné roviny k ploše definované rovnicí $z^3 - xz + y = 0$ v bodě $(3, -2, 2)$.

Obtížnější úlohy. 5) Stanovte rovnici tečné roviny grafu funkce $f : z = \dfrac{x + y}{x - y}$ rovnoběžné s rovinou $2x - 3y + 4z = 10$.

6) Stanovte rovnici tečné roviny plochy $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ rovnoběžné s rovinou $x + 4y + 6z = 0$.

7) Ukažte, že plochy $x + 2y - \ln z + 4 = 0$ a $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ mají ve společném bodě $\mathbf{a} = (x, y, 1)$ společnou tečnou rovinu.

Výsledky. 1) $\tau : 2x+4y-z-5 = 0$ 2) $\tau : x-2y+z = 0,\ n : x = 1+t, y = 1-2t, z = 1+t$

3) $\tau : 8x - 3y - z = 0,\ n : x = 1 + 8t, y = 2 - 3t, z = 2 - t$ 4) $2x - y - 9z + 10 = 0$

5) $\tau : 2x - 3y + 4z = 20$ 6) $\tau_{1,2} : 2x + 8y + 12z \pm 21 = 0$

7) Rovina má rovnici $\tau : x + 2y - y = 5$, společný bod je $\mathbf{a} = (2, -3, 1)$.