4. DERIVACE SLOŽENÉ FUNKCE, LOKÁLNÍ EXTRÉMY

CVIČENÍ Z MATEMATIKY 3 (DOPORUČENÉ ÚLOHY)

1. Derivace složené funkce

V následujících úlohách vypočítejte $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ podle pravidla pro derivování složené funkce a také pomocí dosazení za x a y. Ověřte, že oběma způsoby vyjde stejný výsledek.

1) $z = x^2y - y^2x,\ x = u\cos v, y = u\sin v$ 2) $z = x^2 \ln y,\ x = \dfrac{u}{v}, y = 3u - 2v$

3) $z = \ln(x^2 + y^2),\ x = u + 2v, y = u - 2v$ 4) $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y},\ x = u\sin v, y = u\cos v$

5) Určete parciální derivace a diferenciál funkce $F(x, y, z) = f(u, v, w)$, kde $f(u, v, w) = u + v^2 + w^3$, $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y)$.

6) Určete derivaci funkce $F(t) = f(x, y, z)$, kde $x = t$, $y = t^2$ a $z = t^3$.

7) Vyjádřete *Laplaceův* operátor $\Delta u = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$ v $\mathbb{R}^n$ pro funkci, která závisí pouze na vzdálenosti od počátku souřadnic, tj. $f(\mathbf{x}) = F(r)$, kde $r = \|\mathbf{x}\| = \big(\sum_{i=1}^n x_i^2\big)^{1/2}$.

8) Ukažte, že funkce $u = \dfrac{1}{r}$, kde $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, je pro $r \neq 0$ řešením *Laplaceovy* rovnice $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

9) Ukažte, že funkce $F(x, y) = e^y f\big(y\, e^{\frac{x^2}{2y^2}}\big)$, kde f je diferencovatelná funkce, vyhovuje rovnici $(x^2 - y^2)\dfrac{\partial F}{\partial x} + xy\dfrac{\partial F}{\partial y} = xyF$.

Výsledky. 1) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = (2xy - y^2\cos v + (x^2 - 2xy)\sin v$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = -(2xy - y^2)u\sin v + (x^2 - 2xy)u\cos v$

2) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 2x\ln y\dfrac{1}{v} + 3\dfrac{x^2}{y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = -2x\ln y\dfrac{u}{v^2} - 2\dfrac{x^2}{y}$

3) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{2(x+y)}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{4(x-y)}{x^2+y^2}$

4) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{y\sin v - x\cos v}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{u(y\cos v + x\sin v)}{x^2+y^2}$

5) $D_{(v_1,v_2,v_3)}F(x,y,z) = \big(\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} + 3w^2\frac{\partial w}{\partial x}\big)v_1 + \big(\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} + 3w^2\frac{\partial w}{\partial y}\big)v_2 + \big(\frac{\partial u}{\partial z} + 2v\frac{\partial v}{\partial z}\big)v_3$

6) $F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y}t + 3\frac{\partial f}{\partial z}t^2$

7) $\Delta f = F''(r) + \dfrac{n-1}{r}F'(r)$

2. Lokální extrémy

U dané funkce f nalezněte lokální extrémy.

1) $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ 2) $f(x, y) = e^{4y}(x^2 + 2y)$

3) $f(x, y) = \ln(x - y) - 2x^2 + 4y$ 4) $f(x, y) = xe^{-x^2} - 2y^2$

5) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz + yz)$ 6) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$

© Petr Gurka (poslední aktualizace 6. října 2019).

Výsledky. 1) ostré lokální minimum $f(1, \frac{1}{2}) = 0$

2) ostré lokální minimum $f(0, -\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2e}$

3) ostré lokální maximum $f(1, \frac{3}{4}) = 1 - \ln 4$

4) ostré lokální maximum $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = e^{-1/2}$

5) ostré lokální minimum $f(2, 2, 2) = -16$

6) nemá lokální extrémy