## 5. GLOBÁLNÍ A VÁZANÉ EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

CVIČENÍ Z MATEMATIKY 3 (DOPORUČENÉ ÚLOHY)

**Zkouškové úlohy.** Vyšetřete lokální vázané extrémy funkce $f : z = f(x,y)$ na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; g(x,y) = 0\}$.

1) $z = x - ey + e^2,\ g(x,y) = y - e\ln x - 1$ 2) $z = 2(x + e^{y-1}) - y - 3,\ g(x,y) = y + 2x - 1$

3) $z = y - 2x - 1,\ g(x,y) = y - 4\ln\sqrt{x} - 1$ 4) $z = \dfrac{x+2}{\sqrt{y+5}},\ g(x,y) = y - x^2 - 1$

Určete globální extrémy funkce $f : z = f(x,y)$ na množině $D = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Rozlište, o jaký extrém se jedná (maximum, minimum, ostrý, neostrý).

5) $z = x^3 - y^3$ 6) $z = x^2 - y^2 + 2x$

7) $z = x + 2y$ 8) $z = x^2 - y^2$

**Obtížnější úlohy.** Určete globální extrémy funkce $f : z = f(x,y)$ na množině $M$. Rozlište, o jaký extrém se jedná (maximum, minimum, ostrý, neostrý).

9) $z = 8x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$

10) $z = (x+y)\, e^{-x^2-y^2}$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$

11) $z = x^2 + y^2$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100\}$

12) Jaký největší povrch může mít kvádr s obsahem podstavy 1 a délkou tělesové úhlopříčky 2?

**Návody.** V úlohách 1)–4) je vhodné použít dosazovací metodu, kdy do funkce $f(x,y)$ dosadíme $y$ vyjádřeno pomocí $x$ z rovnice $g(x,y) = 0$. Tím dostáváme funkci jedné proměnné $F(x) = f(x, y(x))$, jejíž lokální extrémy nalezneme metodami pro hledání extrémů funkce jedné proměnné.

V úlohách 5)–8) hledáme globální extrémy hladkých funkcí (tj. funkcí, které jsou spojité a spojitě diferencovatelné) na kompaktních množinách. Tyto extrémy mohou být pouze v bodech lokálních extrémů uvnitř dané množiny (tj. pouze v bodech $[x,y]$, kde $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$) nebo v bodech na hranici kompaktní množiny (tj. v bodech lokálních vázaných extrémů). Podezřelé body na hranici nalezneme buď pomocí dosazovací metody nebo pomocí Věty o Lagrangeově multiplikátoru. Je-li hranicí kompaktní množiny jednotková kružnice $x^2 + y^2 = 1$, je možné místo dosazovací metody použité v úlohách 1)–4) zvolit jinou parametrizaci podmínky $x^2 + y^2 = 1$. Konktétně můžeme volit $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi)$. Po dosazení do funkce $f$ pak dostaneme funkci jedné proměnné $F(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ na intervalu $\langle 0, 2\pi)$, jejíž extrémy nalezneme metodami pro hledání extrémů funkce jedné proměnné. Obecně nelze určit, která z obou metod je pro nalezení podezřelých bodů na hranici vhodnější. V našem případě je vhodné v úlohách 7) a 11) použít Langrangeovu metodu, v úlohách 9) a 10) dosazovací metodu. V úlohách 5), 6) a 7) je použití obou metod srovnatelně obtížné.

**Výsledky.** 1) ostré vázané lokální minimum v $[e^2, 2e+1]$

2) ostré vázané lokální minimum v $[0,1]$

3) ostré vázané lokální maximum v $[1,1]$

4) ostré vázané lokální maximum v $[3,10]$

5) neostrá globální minima $f(0,1) = f(-1,0) = -1$, neostrá globální maxima $f(0,-1) = f(1,0) = 1$

6) neostrá globální minima $f\big(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\big) = f\big(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\big) = -\frac{3}{2}$, ostré globální maximum $f(1,0) = 3$

7) ostré globální minimum $f(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}) = -\sqrt{5}$, ostré globální maximum $f(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}) = \sqrt{5}$
8) neostrá globální minima $f(0,1) = f(0,-1) = -1$, neostrá globální maxima $f(-1,0) = f(1,0) = 1$
9) ostré globální minimum $f(0,-1) = -7$, ostré globální maximum $f(2, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = 65 + 4\sqrt{2}$
10) ostré globální minimum $f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$, ostré globální maximum $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{e}}$
11) neostrá globální minima $f(-2,-1) = f(2,1) = 5$, neostrá globální maxima $f(-2,4) = f(2,-4) = 20$
12) $2 + 4\sqrt{2}$