

**7. APLIKACE DVOJNÉHO A TROJNÉHO INTEGRÁLU**  
 CVIČENÍ Z MATEMATIKY 3 (DOPORUČENÉ ÚLOHY)

**Zkouškové úlohy.** Vypočítejte obsah rovinného útvaru  $\Omega$ , je-li

1)  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq xy \leq 2, x \leq y \leq 2x, x \geq 0\}$ ,

2)  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq y^2 \leq 4x, 2y \leq x^2 \leq 4y\}$ .

3) Vypočítejte obsah rovinného útvaru  $M$  ležícího v 1. kvadrantu a ohraničeného křivkami  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $y = 0$  a  $y = x$ .

4) Určete souřadnice těžiště hmotné rovinné desky určené oblastí

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 6 - 2x\}$$

s konstantní hustotou  $\rho$ .

5) Určete souřadnice těžiště tělesa  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x, y, z \leq 1\}$ , je-li hustota  $\rho(x, y, z) = x + y + z$ .

**Obtížnější úlohy.** Určete objem tělesa  $\Omega$ , je-li

6)  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{1}{4}x^2 + y^2 + \frac{1}{9}z^2 \leq 1, y \geq 0\}$ ,

7)  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

8) Určete objem tělesa  $\Omega$  ohraničeného plochami  $z = 3x^2 + 3y^2$ ,  $z = 1 - x^2 - y^2$ .

9) Určete moment setrvačnosti  $J_z(\Omega)$  tělesa  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, 1 \leq z \leq 2\}$ , je-li hustota  $\rho(x, y, z) = 1$ .

**Důležité vzorce.** Nechť  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , funkce  $\rho : \Omega \rightarrow (0, \infty)$  je *hustota*,  $n = 2, 3$ .

obsah, objem:

$$\mu(\Omega) = \int_{\Omega} d\mathbf{x}$$

hmotnost:

$$m(\Omega) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

statický moment k ose  $x_i$ :

$$M_{x_i}(\Omega) = \int_{\Omega} x_j \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$$

těžiště (pro  $n = 2$ ):

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2), \quad a_i = \frac{M_{x_i}(\Omega)}{m(\Omega)}, \quad i = 1, 2$$

statický moment k rovině  $x_j x_k$ :

$$M_{x_j x_k}(\Omega) = \int_{\Omega} x_i \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\} \text{ navzájem různé}$$

těžiště (pro  $n = 3$ ):

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad a_i = \frac{M_{x_i}(\Omega)}{m(\Omega)}, \quad i = 1, 2, 3$$

moment setrvačnosti k ose  $x_i$ :

$$J_{x_i}(\Omega) = \int_{\Omega} (x_j^2 + x_k^2) \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\} \text{ navzájem různé}$$

**Návody.** V úloze 1) je vhodné volit substituci  $u = xy, v = y/x$ , v úloze 2) je vhodné volit substituci  $u = y^2/x, v = x^2/y$ .

**Výsledky.**

- |                                      |  |                                     |
|--------------------------------------|--|-------------------------------------|
| 1) $\frac{1}{2} \ln 2$               | 2) 2   | 3) $\frac{5}{8} \pi$                |
| 4) $[1, 2]$                          | 5) $[\frac{5}{9}, \frac{5}{9}, \frac{5}{9}]$ | 6) $4\pi$                           |
| 7) $\frac{4}{3} \pi (2\sqrt{2} - 1)$ | 8) $\frac{\pi}{12}$                          | 9) $J_z(\Omega) = \frac{113\pi}{5}$ |