8. LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

CVIČENÍ Z MATEMATIKY 3 (DOPORUČENÉ ÚLOHY)

1. Rovnice 1. řádu

1.1. **Lineární homogenní rovnice 1. řádu s konstantními koeficienty.** Jedná se o rovnici typu $ay'+by=0$, kde a, b jsou reálné konstanty, $a \neq 0$. Metoda řešení je založena na jednoduchém pozorování, že její řešení je možné hledat ve tvaru $y = e^{kx}$. Dosazením y a y' do diferenciální rovnice dostaneme algebraickou rovnici $ak + b = 0$ (*charakteristická rovnice*). Obecné řešení diferenciální rovnice pak je $y = C\,e^{kx}$, kde $k = -b/a$ (kořen charakteristické rovnice) a C je libovolná reálná konstanta.

$$1)\quad y' + 4y = 0 \quad 2)\quad 2y' = 5y \quad 3)\quad y' + \tfrac{1}{2}y = 0$$

1.2. **Lineární (nehomogenní) rovnice 1. řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou.** Jedná se o rovnici typu $ay' + by = \mathcal{R}(x)$, kde a, b jsou reálné konstanty, $a \neq 0$, $\mathcal{R}(x)$ je funkce, která je ve tvaru $\mathcal{R}(x) = e^{px}\big(\mathcal{P}_1(x)\cos(qx) + \mathcal{P}_2(x)\sin(qx)\big)$, kde $p, q \in \mathbb{R}$ a $\mathcal{P}_1(x)$, $\mathcal{P}_2(x)$ jsou polynomy stupně nejvýše m. Řešení takové rovnice má tvar $y = C\,e^{kx} + v(x)$, kde $C\,e^{kx}$ je obecné řešení příslušné homogenní rovnice (viz odstavec 1.1) a $v(x)$ je jedno (pevné) řešení nehomogenní rovnice, které lze hledat v podobném tvaru jako je pravá strana $\mathcal{R}(x)$. Tedy $v(x) = x^r\,e^{px}\big(\mathcal{Q}_1(x)\cos(qx) + \mathcal{Q}_2(x)\sin(qx)\big)$, kde $\mathcal{Q}_1(x)$, $\mathcal{Q}_2(x)$ jsou polynomy stupně m a číslo $r = 1$, pokud $p = -b/a$ (tj. číslo p v exponentu exponenciální funkce je kořenem charakteristické rovnice), $r = 0$, tj. $x^r = 1$, pokud $p \neq -b/a$. Nyní stačí nalézt polynomy $\mathcal{Q}_1(x)$, $\mathcal{Q}_2(x)$. Tato metoda se nazývá *metoda neurčitých koeficientů*.

$$4)\quad 2y' - y = x \quad 5)\quad y' + y = 2\sin x \quad 6)\quad y' - 2y = e^{2x}$$

1.3. **Lineární homogenní rovnice 1. řádu (s nekonstantními koeficienty).** Jedná se o rovnici typu $a(x)y' + b(x)y = 0$, kde $a(x)$, $b(x)$ jsou funkce proměnné x, $a \not\equiv 0$. Tato rovnice je řešitelná metodou separace proměnných.

$$7)\quad y' + \frac{y}{\sin^2 x} = 0 \quad 8)\quad \frac{y'}{x} - e^x\,y = 0 \quad 9)\quad 2y' - y\,\ln x = 0$$

1.4. **Lineární (nehomogenní) rovnice 1. řádu (s nekonstantními koeficienty).** Jedná se o rovnici typu $a(x)y' + b(x)y = \mathcal{R}(x)$, kde $a(x)$, $b(x)$, $\mathcal{R}(x)$ jsou funkce proměnné x, $a \not\equiv 0$. Nejdříve vyřešíme příslušnou homogenní rovnici $a(x)y' + b(x)y = 0$ (separací proměnných), jejíž obecné řešení vyjde ve tvaru $y = C\,y_0(x)$. Obecné řešení nehomogenní rovnice hledáme metodou *variace konstanty*, která spočívá v tom, že ho hledáme ve tvaru $y = k(x)\,y_0(x)$, kde $k(x)$ nyní není konstanta, ale je to funkce proměnné x.

$$10)\quad y' + y\,\sin x = \frac{4x^2 - 1}{x^2}\,e^{\cos x} \quad 11)\quad y'\,\sin x + y\,\cos x = \frac{1}{\sin^2 x} \quad 12)\quad xy' + 2y = \frac{4}{2x^2 + 1}$$

Výsledky.

1) $y = C\,e^{-4x}$	2) $y = C\,\sqrt{e^{5x}}$
3) $y = \dfrac{C}{\sqrt{e^x}}$	4) $y = C\,\sqrt{e^x} - x - 2$
5) $y = \dfrac{C}{e^x} + \sin x - \cos x$	6) $y = C\,e^{2x} + x\,e^{2x}$
7) $y = C\,e^{\operatorname{cotg} x}$	8) $y = C\,e^{(x-1)e^x}$
9) $y = C\,x^{\frac{x-1}{2}}$	10) $y = \Big(4x + \dfrac{1}{x} + C\Big)e^{\cos x}$
11) $y = \dfrac{C - \operatorname{cotg} x}{\sin x}$	12) $y = \dfrac{C + \ln(2x^2+1)}{x^2}$

Poznámka. 1.1. Metoda pro řešení nehomogenních lineárních rovnic z odstavce 1.4 je univerzální. Touto metodou lze řešit také rovnice z odstavce 1.2.

2. Rovnice 2. řádu

Nalezněte obecné řešení dané diferenciální rovnice.

Lineární diferenciální rovnice homogenní s konstantními koeficienty. Jedná se o rovnici typu $Ay'' + By' + Cy = 0$, kde $A, B, C \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$.

1) $y'' - 4y = 0$ 2) $5y'' - 3y' = 0$ 3) $16y'' + 9y = 0$

4) $y'' + 5y' + 6y = 0$ 5) $y'' + 4y' + 4y = 0$ 6) $y'' + 2y' + 10y = 0$

Lineární diferenciální rovnice nehomogenní s konstantními koeficienty a se speciální pravou stranou — metoda neurčitých koeficientů. Jedná o rovnici typu

$$Ay'' + By' + Cy = e^{ax}\big(\mathcal{P}_1(x)\cos(bx) + \mathcal{P}_2(x)\sin(bx)\big),$$

kde $A, B, C, a, b \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, $A \neq 0$, $\mathcal{P}_1(x)$, $\mathcal{P}_2(x)$ jsou polynomy stupně nejvýše m. Jak známo z teorie, řešení takové rovnice je možné vyjádřit ve tvaru $y = \psi(x) + \nu(x)$, kde $\psi(x)$ je obecné řešení příslušné homogenní rovnice a $\nu(x)$ je jedno (pevné) řešení nehomogenní rovnice, které lze hledat ve tvaru

$$\nu(x) = x^r\, e^{ax}\big(\mathcal{Q}_1(x)\cos(bx) + \mathcal{Q}_2(x)\sin(bx)\big),$$

kde $\mathcal{Q}_1(x)$, $\mathcal{Q}_2(x)$ jsou polynomy stupně m a číslo r je rovno násobnosti kořene $k = a + ib$ v charakteristické rovnici

$$Ak^2 + Bk + C = 0.$$

(Zde i značí imaginární jednotku, tj. $i^2 = -1$.)

Rovnice s polynomiální pravou stranou, tj. $a + ib = 0$, *a násobností* $r = 0$.

7) $y'' - 4y = 8x^3$ 8) $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$ 9) $y'' + y' - 2y = 6x^2$

Rovnice s exponenciální pravou stranou, tj. $b = 0$, $a \neq 0$, $m = 0$, *a násobností* $r = 0$.

10) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$ 11) $y'' + 2y' + y = e^x$ 12) $y'' - 3y' + 2y = 3e^{-x}$

Rovnice s goniometrickou pravou stranou, tj. $a = 0$, $b \neq 0$, $m = 0$, *a násobností* $r = 0$.

13) $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x$ 14) $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$

Rovnice s kombinovanou pravou stranou a násobností $r = 0$.

15) $y'' - 2y' + 5y = e^x(4 + 3x)$ 16) $y'' - 3y' + 2y = e^x \sin x$ 17) $9y'' + 6y' + y = x\cos x$

Rovnice s kombinovanou pravou stranou a nenulovou násobností, tj. $r \in \{1, 2\}$.

18) $y'' - 2y' = x^2 - x$ 19) $y'' - 2y' + y = e^x$ 20) $y'' + 4y = 2\sin 2x$

Rovnice různých typů.

21) $y'' + 4y' + 5y = (5x^2 - 2x - 1)e^{-2x}$ 22) $y'' - 6y' + 9y = 9\sin 3x$
23) $y'' + 16y = 16\cos 4x - 24\sin 4x$

Lineární diferenciální rovnice nehomogenní s konstantními koeficienty — metoda variace konstant. Pomocí metody variace konstant nalezněte obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu.

24) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$ 25) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$ 26) $y'' + y' = \dfrac{1}{1+e^x}$
27) $y'' - 2y' = \dfrac{1}{x} - 2 - 2\ln x$ 28) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^x}$ 29) $y'' - 2y' + 10y = \dfrac{9e^x}{\cos 3x}$

Výsledky.

1) $y = C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{2x}$ 2) $y = C_1 + C_2\, e^{\frac{3}{5}x}$
3) $y = C_1\, \cos(\frac{3}{4}x) + C_2\, \sin(\frac{3}{4}x)$ 4) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$
5) $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$ 6) $y = (C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)e^{-x}$
7) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - 2x^3 - 3x$ 8) $y = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + x^2 - 8x + 7$
9) $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} - 3(x^2 + x + \frac{3}{2})$ 10) $y = (C_1 + C_2x)e^x + e^{2x}$
11) $y = (C_1x + C_2)e^{-x} + \frac{1}{4}e^x$ 12) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-x}$
13) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \frac{1}{4}(\sin 2x - \cos 2x)$ 14) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{5}{6}\cos 3x - \frac{1}{6}\sin 3x$
15) $y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + e^x(1 + \frac{3}{4}x)$ 16) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^x(\cos x - \sin x)$
17) $y = (C_1 + C_2x)e^{-\frac{x}{3}} + (\frac{3}{50}x + \frac{27}{250})\sin x + (\frac{-4}{50}x + \frac{39}{250})\cos x$ 18) $y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{6}x^3$
19) $y = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x$ 20) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x$
21) $y = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + (5x^2 - 2x - 11)e^{-2x}$ 22) $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{1}{2}\cos 3x$
23) $y = C_1\sin x + C_2\cos x + x(3\cos 4x + 2\sin 4x)$

24) $y = (c_1 - \frac{1}{2}x)\cos 2x + \dfrac{4c_2 + \ln|\sin 2x|}{4}\sin 2x$ 25) $y = c_1\sin x + c_2\cos x - \dfrac{\cos 2x}{2\cos x}$
26) $y = c_1 + c_2e^{-x} - (1 + e^{-x})\ln(1 + e^x) + x$ 27) $y = c_1 + c_2e^{2x} + x\ln x$
28) $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{1}{2} + (x-1)e^x + xe^{2x} - (e^x + e^{2x})\ln(1 + e^x)$
29) $y = c_1e^x\cos 3x + c_2e^x\sin 3x + e^x(\cos 3x\ln(\cos 3x) + 3x\sin 3x)$

Návod. V úloze 27) je nutné vypočítat primitivní funkci k funkci $g(x) = e^{-2x}(\frac{1}{x} - 2 - 2\ln x)$. Použijeme několikrát metodu per partes. Poprvé volíme $u = e^{-2x}$, za v' volíme zbývající funkci. Ve druhém kroku je nutné vypočítat neurčitý integrál $\int(1-2x)\ln x\, e^{-2x}\,\mathrm{d}x$. Zde volíme $u = \ln x$, $v' = (1-2x)e^{-2x}$, přičemž v spočítáme metodou per partes.