9. SOUSTAVY LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC 1. ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

CVIČENÍ Z MATEMATIKY 3 (DOPORUČENÉ ÚLOHY)

1. Eliminační metoda

Pomocí eliminační metody nalezněte obecné řešení následujících soustav lineárních diferenciálních rovnic. U nehomogenních soustav použijte metodu neurčitých koeficientů.

Základní úlohy.

1) $\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} y_1' &= 6y_1 - 4y_2 \\ y_2' &= y_1 + 6y_2 \end{aligned}$ 3) $\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= -y_1 + 3y_2 \end{aligned}$

Zkouškové úlohy.

4) $\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 2y_2 + 2x^2 - 4x + 2 \\ y_2' &= 2y_1 + 6y_2 - 6x^2 - 2x \end{aligned}$ 5) $\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + 9y_2 - 3e^x \\ y_2' &= y_1 + 4y_2 - 4e^x \end{aligned}$

6) $\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 9y_2 + \sin x \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 - \cos x \end{aligned}$

Obtížnější úlohy.

7) $\begin{aligned} y_1' &= -4y_1 - 4y_2 + 2e^{2x} \\ y_2' &= 6y_1 + 6y_2 + 2x \end{aligned}$

8) Nalezněte řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + y_2 + e^x \\ y_2' &= -4y_1 - 2y_2 + xe^x \end{aligned}, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0.$$

Výsledky.

1) $\begin{aligned} y_1 &= -2c_1 + 2c_2e^{4x} \\ y_2 &= c_1 + c_2e^{4x} \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} y_1 &= -2c_1e^{6x}\sin 2x + 2c_2e^{6x}\cos 2x \\ y_2 &= c_1e^{6x}\cos 2x + c_2e^{6x}\sin 2x \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} y_1 &= c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} \\ y_2 &= c_1e^{2x} + c_2(1+x)e^{2x} \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} y_1 &= c_1e^{4x} + c_2xe^{4x} + 2x \\ y_2 &= -c_1e^{4x} - c_2(x + \tfrac{1}{2})e^{4x} + x^2 \end{aligned}$

5) $\begin{aligned} y_1 &= -3c_1e^x + 3c_2e^{7x} + \tfrac{1}{2}(5+9x)e^x \\ y_2 &= c_1e^x + c_2e^{7x} - \tfrac{3}{2}xe^x \end{aligned}$

6) $\begin{aligned} y_1 &= -3c_1e^{2x}\sin 3x + 3c_2e^{2x}\cos 3x - \tfrac{2}{5}\sin x + \tfrac{7}{10}\cos x \\ y_2 &= c_1e^{2x}\cos 3x + c_2e^{2x}\sin 3x + \tfrac{1}{5}\cos x + \tfrac{1}{10}\sin x \end{aligned}$

7) $\begin{aligned} y_1 &= c_1 + c_2e^{2x} - 4xe^{2x} + 2x^2 + 2x \\ y_2 &= -c_1 - \tfrac{3}{2}c_2e^{2x} + (6x + \tfrac{3}{2})e^{2x} - 2x^2 - 3x - \tfrac{1}{2} \end{aligned}$

8) $\begin{aligned} y_1 &= \tfrac{5}{3}e^{2x} + \tfrac{1}{12}e^{-x} - \tfrac{7}{4}e^x - \tfrac{1}{2}xe^x \\ y_2 &= -\tfrac{5}{3}e^{2x} - \tfrac{1}{3}e^{-x} + 2e^x + xe^x \end{aligned}$

2. Variace konstant pro soustavy 1. řádu

Obtížnější úlohy. Pomocí metody variace konstant nalezněte obecné řešení nehomogenní soustavy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu.

1) $\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - 2y_2 \\ y_2' &= 8y_1 - 4y_2 + \sqrt{x} \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 - \ln x \\ y_2' &= -4y_1 - 2y_2 + \ln x \end{aligned}$

Výsledky. 1) $y_1 = c_1 + c_2x - \frac{8}{15}x^{5/2}$, $y_2 = 2c_1 + c_2(x - \frac{1}{2}) - \frac{16}{15}x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2}$
2) $y_1 = c_1 + x(c_2+1) + \frac{3}{4}x^2 - x\ln x - \frac{1}{2}x^2\ln x$, $y_2 = -2c_1 + c_2 - x(1+2c_2) - \frac{3}{2}x^2 + (x+x^2)\ln x$