11. LAPLACEOVA TRANSFORMACE — OBRAZY A VZORY

CVIČENÍ Z MATEMATIKY 3 (DOPORUČENÉ ÚLOHY)

Pomocí tabulky pro Laplaceovu transformaci vypočítejte Laplaceovu transformaci

$$F(p) = \mathscr{L}\{f(t)\}(p)$$

dané funkce $f(t)$.

Základní úlohy.

1) $f(t) = 3t\,e^{3t}$ 2) $f(t) = t^3 \sin t$

3) $f(t) = t^2 \cos t$ 4) $f(t) = t(\cos 4t - 2\sin 4t)$

Zkouškové úlohy.

5) $f(t) = 3\sin 3t \cos t$ 6) $f(t) = 2e^{-3t}\cos 5t$

7) $f(t) = te^{-3t} - 2e^{-2t}\sin 3t + 4$ 8) $f(t) = e^{-3t}(1 - 2\sin 3t) + \int_0^t e^{3s}\cos 3s\,\mathrm{d}s$

Obtížnější úlohy. (nalézt obrazy impulsů)

9) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \le t \le 2 \\ 0 & \text{pro } t > 2 \end{cases}$ 10) $f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } 0 \le t \le 3 \\ 0 & \text{pro } t > 3 \end{cases}$

11) $f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{pro } 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{pro } t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ 12) $f(t) = \begin{cases} -\sin t & \text{pro } \pi < t \le \pi \\ 0 & \text{pro } 0 \le t \le \pi \text{ nebo } t > 2\pi \end{cases}$

Pomocí tabulky nalezněte Laplaceův vzor $g(t) = \mathscr{L}^{-1}\{G(p)\}(t)$ dané funkce $G(p)$.

Zkouškové úlohy.

13) $G(p) = \dfrac{2p+3}{p^2+4p+3}$ 14) $G(p) = \dfrac{6}{(p^2+1)(p^2+4)}$

15) $G(p) = \dfrac{3p^2+2p-4}{p^3+7p^2+10p}$ 16) $G(p) = \dfrac{4p+5}{p^2+4p+13}$

Obtížnější úlohy. (nalézt zpětnou transformaci obrazů impulsů)

17) $G(p) = \dfrac{2e^{-p}}{p(p-1)}$ 18) $G(p) = \dfrac{2p - e^{-\pi p}}{p^2+2p+2}$

Výsledky.

1) $F(p) = \dfrac{3}{(p-3)^2}$

2) $F(p) = \dfrac{24(p^3-p)}{(1+p^2)^4}$

3) $F(p) = \dfrac{2p^3-6p}{(1+p^2)^3}$

4) $F(p) = \dfrac{p^2-16p-16}{(16+p^2)^2}$

5) $F(p) = \dfrac{6}{p^2+16} + \dfrac{3}{p^2+4}$

6) $F(p) = \dfrac{2p+6}{p^2+6p+34}$

7) $F(p) = \dfrac{1}{(p+3)^2} - \dfrac{6}{(p+2)^2+9} + \dfrac{4}{p}$

8) $F(p) = \dfrac{1}{p+3} - \dfrac{6}{(p+3)^2+9} + \dfrac{1}{p}\,\dfrac{p-3}{(p-3)^2+9}$

9) $F(p) = \dfrac{1}{p}(1-e^{-2p})$

10) $F(p) = \dfrac{1}{p^2}(1-e^{3p}-3pe^{-3p})$

11) $F(p) = \dfrac{1}{p^2+1}(p+e^{-p\frac{\pi}{2}}) + \dfrac{1}{p}e^{-p\frac{\pi}{2}}$

12) $F(p) = \dfrac{1}{p^2+1}(e^{-p\pi}+e^{-2p\pi})$

13) $g(t) = \frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t}$

14) $g(t) = 2\sin t - \sin 2t$

15) $g(t) = -\frac{2}{5} - \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{61}{15}e^{-5t}$

16) $g(t) = e^{-2t}(4\cos 3t - \sin 3t)$

17) $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \le t \le 1 \\ 2(e^{t-1}-1) & \text{pro } t > 1 \end{cases}$

18) $g(t) = \begin{cases} 2e^{-t}(\cos t - \sin t) & \text{pro } 0 \le t \le \pi \\ e^{-t}(2\cos t - (2-e^{\pi})\sin t) + \sin t & \text{pro } t > \pi \end{cases}$

Příloha — tabulka pro Laplaceovu transformaci

Používáme značení $F = \mathscr{L}\{f\}$, $G = \mathscr{L}\{G\}$ apod., $g(0^+) = \lim_{t\to 0_+} g(t)$. Čísla α, β, a, b jsou reálná, číslo n je přirozené.

ϕ	$\mathscr{L}\{\phi\}$	$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\}(p)$	$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\}(p)$
$\alpha f + \beta g$	$\alpha F + \beta G$	1	$\dfrac{1}{p}$	t	$\dfrac{1}{p^2}$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$t^n\, e^{at}$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$e^{at}f(t)$	$F(p-a)$	e^{at}	$\dfrac{1}{(p-a)}$	$\sin(at)$	$\dfrac{a}{p^2+a^2}$
$f(t-b)$	$e^{-bp}F(p)$	$\cos(at)$	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$	$t\,\sin(at)$	$\dfrac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$
$-tf(t)$	$F'(p)$	$t\,\cos(at)$	$\dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\sin^2(at)$	$\dfrac{2a^2}{p(p^2+4a^2)}$
$f'(t)$	$pF(p) - f(0^+)$	$\cos^2(at)$	$\dfrac{p^2+2a^2}{p(p^2+4a^2)}$	$e^{at}\,\sin(bt)$	$\dfrac{b}{(p-a)^2+b^2}$
$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p) - \sum\limits_{j=1}^{n} p^{n-j}f^{(j-1)}(0^+)$	$e^{at}\,\cos(bt)$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$	$\sinh(at)$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$
$\int_0^t f$	$\frac{1}{p}F(p)$	$\cosh(at)$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$	$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,p^{-3/2}$