12. ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC POMOCÍ LAPLACEOVY TRANSFORMACE

CVIČENÍ Z MATEMATIKY 3 (DOPORUČENÉ ÚLOHY)

Pomocí Laplaceovy transformace řešte následující Cauchyovy úlohy pro diferenciální rovnice 2. řádu.

Zkouškové úlohy.

1) $y'' + 4y = 2\cos t,\ y(0) = y'(0) = 0$ 2) $y'' + 4y = 2\cos 2t,\ y(0) = y'(0) = 0$

3) $y'' + 2y' + y = 2t,\ y(0) = y'(0) = 0$ 4) $y'' - 2y' + 2y = e^{-t},\ y(0) = 2, y'(0) = 1$

Pomocí Laplaceovy transformace řešte následující Cauchyovy úlohy pro soustavy diferenciálních rovnic.

5) $\begin{array}{rl} y_1' = & y_1 + y_2 \\ y_2' = & -y_1 - y_2 \end{array}$, $y_1(0) = a, y_2(0) = b$ 6) $\begin{array}{rl} y_1' = & y_1 + e^{2t} \\ y_2' = & -y_1 + 3y_2 + 3 \end{array}$, $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$

7) $\begin{array}{rl} y_1' = & y_1 + y_2 + \cos t \\ y_2' = & -y_1 + y_2 - \sin t \end{array}$, $y_1(0) = -1, y_2(0) = 0$

Obtížnější úlohy.

8) $\begin{array}{rl} y_1' = & 2y_1 + y_2 + e^t \\ y_2' = & y_2 + 1 \\ y_3' = & -y_3 \end{array}$, $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 9) $\begin{array}{rl} y_1' = & -y_1 + 2y_3 + 1 \\ y_2' = & y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3' = & 2y_1 - y_3 \end{array}$, $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte fundamentální matici $\boldsymbol{U}(t)$ soustavy $\mathbf{u}' = \boldsymbol{A}\,\mathbf{u}$, která vyhovuje počáteční podmínce $\boldsymbol{U}(0) = \boldsymbol{E}$, je-li dána konstantní matice $\boldsymbol{A}$.

Zkouškové úlohy.

10) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 11) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 12) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ 13) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Obtížnější úlohy.

14) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ 15) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Výsledky.

1) $y = \frac{2}{3}(\cos t - \cos 2t)$

2) $y = \frac{1}{2} t \sin 2t$

3) $y = 4e^{-t} + 2te^{-t} - 4 + 2t$

4) $y = \frac{3}{5} e^t \big(3\cos t - \sin t\big) + \frac{1}{5} e^{-t}$

5) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + (a+b)t \\ b - (a+b)t \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} - 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2e^t + \frac{3}{2} e^{2t} \\ e^t - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^t + e^{-3t}) \\ te^t \\ \frac{1}{2}(e^t - e^{-3t}) \end{pmatrix}$

10) $\boldsymbol{U}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix}$

11) $\boldsymbol{U}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cosh t & \frac{1}{2} \sinh t \\ \frac{1}{2} \sinh t & \frac{1}{2} \cosh t \end{pmatrix}$

12) $\boldsymbol{U}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\big(3e^{3t} + e^{-t}\big) & \frac{1}{4}\big(e^{3t} - e^{-t}\big) \\ \frac{3}{4}\big(e^{3t} - e^{-t}\big) & \frac{1}{4}\big(e^{3t} + 3e^{-t}\big) \end{pmatrix}$

13) $\boldsymbol{U}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\big(e^{3t} + 2\big) & \frac{2}{3}\big(e^{3t} - 1\big) \\ \frac{1}{3}\big(e^{3t} - 1\big) & \frac{1}{3}\big(2e^{3t} + 1\big) \end{pmatrix}$

14) $\boldsymbol{U}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} + e^t - e^{-t} & e^{-t} - e^{2t} & e^{-t} - e^t \\ -e^{-t} + e^t & e^{-t} & e^{-t} - e^t \\ -e^{-t} + e^{2t} & e^{-t} - e^{2t} & e^{-t} \end{pmatrix}$

15) $\boldsymbol{U}(t) = \begin{pmatrix} e^t & \frac{1}{3}\big(e^{-2t} - e^t\big) & \frac{1}{3}\big(e^{-2t} - e^t\big) \\ 0 & 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & 2\big(e^{-2t} - e^{-t}\big) & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{pmatrix}$