2. Limita funkce, spojitost funkce, výpočet limity

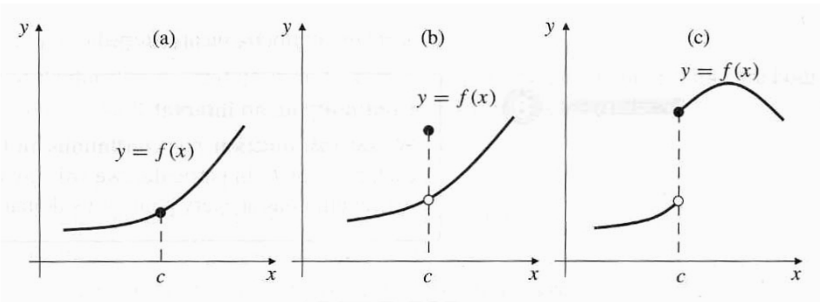
(PEF — PaA)

Petr Gurka

aktualizováno 8. října 2015

Obsah

1 Spojitost a limita funkce



- Na obrázku (a) má funkce f limitu v bodě c a je spojitá v bodě c.
- Na obrázku (b) má funkce f limitu v bodě c a není spojitá v bodě c.
- Na obrázku (c) nemá funkce f limitu v bodě c, tedy není spojitá v bodě c. Je v bodě c spojitá zprava.

1.1 Definice limity funkce v bodě

Definice 1 (Okolí bodu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Množina

- $U_\delta(a) := (a - \delta, a + \delta)$ je *δ-okolí* bodu a;
- $P_\delta(a) := (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ je *prstencové δ-okolí* bodu a.

Pokud $a \in \{-\infty, +\infty\}$, pak definujeme

- $U_\delta(+\infty) = P_\delta(+\infty) := (1/\delta, +\infty)$;
- $U_\delta(-\infty) = P_\delta(-\infty) := (-\infty, -1/\delta)$.

Definice 2 (Limita funkce v bodě)**.** Nechť $c, A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Funkce f má v bodě c limitu A, píšeme $\lim_{x\to c} f(x) = A$, jestliže ke každému okolí $U_\varepsilon(A)$ existuje okolí $P_\delta(c) \subset \mathcal{D}(f)$, že jestliže $x \in P_\delta(c)$, potom $f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

Poznámky 3.

- Je-li $c \in \mathbb{R}$, hovoříme o limitě ve vlastním bodě.
- Je-li $c \in \{-\infty, +\infty\}$, hovoříme o limitě v *nevlastním* bodě.
- Pokud $A \in \mathbb{R}$, jedná se o vlastní limitu.
- Pokud $A \in \{-\infty, +\infty\}$, jedná se o *nevlastní* limitu.
- Pokud pro $c \in \mathbb{R}$ nahradíme $P_\delta(c)$ levým okolím $P_\delta^-(c) := (c - \delta, c)$, jedná se o *limitu zleva* $\lim_{x\to c^-}$.
- Pokud pro $c \in \mathbb{R}$ nahradíme $P_\delta(c)$ pravým okolím $P_\delta^+(c) := (c, c + \delta)$, jedná se o *limitu zprava* $\lim_{x\to c^+}$.

1.2 Základní vlastnosti limit

Z definice limity ihned plyne:

Věta 4.

1. *Funkce f může mít v bodě c nejvýše jednu limitu (pokud $c \neq \pm\infty$, tak také nejvýše jednu limitu zleva a nejvýše jednu limitu zprava).*
2. *Rovnost $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$ platí právě tehdy, když $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = A$.*

1.3 Spojitost funkce v bodě (lokální spojitost)

Definice 5. Funkce f je spojitá v bodě c, jestliže existuje vlastní limita $\lim_{x\to c} f(x)$ a platí $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Poznámky 6.

1. Nahradíme-li v definici oboustrannou limitu limitou zleva, případně limitou zprava, jedná se o spojitost zleva, případně zprava.
2. Bod spojitosti c musí být *vnitřním bodem* definičního oboru $\mathcal{D}(f)$ funkce f, tj. nějaké jeho okolí $U_\delta(c)$ musí celé náležet do definičního oboru $\mathcal{D}(f)$. Podobně, je-li funkce f spojitá v c zleva (resp. zprava), je $U_\delta^-(c) \subset \mathcal{D}(f)$ (resp. $U_\delta^+(c) \subset \mathcal{D}(f)$).
3. K existenci limity v bodě c je nutné, aby $P_\delta(c) \subset \mathcal{D}(f)$, tedy není potřeba, aby funkce byla definovaná v bodě c (analogicky pro limitu zleva $P_\delta^-(c) \subset \mathcal{D}(f)$ a pro limitu zprava $P_\delta^+(c) \subset \mathcal{D}(f)$.

2 Výpočet limit

2.1 Využití spojitosti elementárních funkcí

Věta 7 (Spojitost elementárních funkcí)**.** *Nechť f je elementární funkce s definičním oborem $\mathcal{D}(f)$ a nechť $c \in \mathcal{D}(f)$.*

- *Je-li c vnitřním bodem $\mathcal{D}(f)$, je f spojitá v c.*
- *Je-li $U_\delta^-(c) \subset \mathcal{D}(f)$ pro nějaké $\delta > 0$, je f spojitá v c zleva.*
- *Je-li $U_\delta^+(c) \subset \mathcal{D}(f)$ pro nějaké $\delta > 0$, je f spojitá v c zprava.*

2.2 Limita součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

Označme

$$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Další tvrzení budeme pro jednoduchost formulovat pouze pro oboustranné limity.

Věta 8 (Limita součtu, rozdílu, součinu a podílu)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a nechť existují limity $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to c} g(x) = B$, kde $A, B \in \mathbb{R}^*$. Potom:*

1. $\lim\limits_{x\to c} \big(f(x) + g(x)\big) = A + B$,
2. $\lim\limits_{x\to c} \big(f(x) - g(x)\big) = A - B$,
3. $\lim\limits_{x\to c} \big(f(x)\, g(x)\big) = A\, B$,
4. $\lim\limits_{x\to c} \big(f(x)/g(x)\big) = A/B$,

má-li pravá strana smysl (tj. pokud A, B nejsou konečná čísla, nejedná se o výrazy typu: $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $0/0$, ∞/∞).

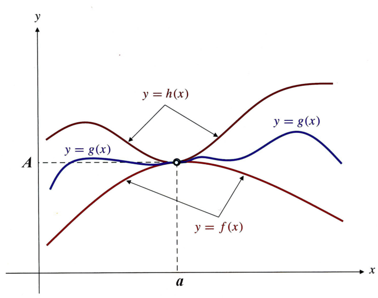
2.3 Věta „o sevření“

Věta 9. *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť pro funkce f, g, h platí*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \text{v nějakém okolí } P_\delta(a) \text{ bodu } a.$$

Nechť platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, kde $A \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Situace pro $a \in \mathbb{R}$ je načrtnuta na následujícím obrázku.



Důsledkem předchozí věty je:

Věta 10. *Nechť* $a \in \mathbb{R}^*$. *Nechť funkce* f *je omezená v nějakém okolí* $P_\delta(a)$ *bodu* a *(tj. existuje* $C > 0$*, že* $|f(x)| \leq C$ *pro všechny* $x \in P_\delta(a)$*) a platí, že* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. *Potom* $\lim\limits_{x \to a} f(x)\, g(x) = 0$.

2.4 Limita složené funkce

Věta 11. *Předpokládejme, že* $a, A, B \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{x \to a} g(x) = A, \quad \lim_{y \to A} f(y) = B$$

a existuje okolí $P_\delta(a)$ *bodu* a*, že pro všechna* $x \in P_\delta(a)$ *platí* $g(x) \neq A$. *Potom* $\lim\limits_{x \to a} f\big(g(x)\big) = B$.

Užitečná je také následující věta.

Věta 12. *Nechť* $a \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$ *a nechť funkce* f *je spojitá v bodě* A. *Potom*

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f(A), \quad \textit{tj.} \ \lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f\big(\lim\nolimits_{x \to a} g(x)\big).$$