3. Derivace, její fyzikální a geometrický význam

(PEF — PaA)

Petr Gurka

aktualizováno 17. října 2012

Obsah

1 Derivace funkce v bodě

1.1 Definice první derivace

Definice 1 (Derivace funkce v bodě)**.** Nechť f je funkce a a reálné číslo. Potom *první derivace* $f'(a)$ funkce f v bodě a je definována vztahem

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Hovoříme o *nevlastní derivaci*, je-li tato limita nevlastní. Pokud limita neexistuje, říkáme, že funkce f nemá v bodě a derivaci.

Místo zápisu $f'(a)$ se také používají zápisy $\frac{df}{dx}(a)$, $\frac{d}{dx}f(a)$.

Poznámky 2.

- Nahradíme-li oboustrannou limitu v definici derivace limitou zprava, resp. zleva, hovoříme o derivaci zprava, resp. zleva.
- První derivace $f'(a)$ může existovat pouze tehdy, je-li bod a vnitřním bodem definičního oboru $\mathcal{D}(f)$ funkce f. Derivace v bodě a zleva (resp. zprava) může existovat pouze tehdy, existuje-li číslo $\delta > 0$ takové, že $(a-\delta, a\rangle \subset \mathcal{D}(f)$ (resp. $\langle a, a+\delta) \subset \mathcal{D}(f)$).

1.2 Fyzikální význam derivace

Budeme pozorovat pohyb bodu na přímce v závislosti na čase.

x	čas (na ose x)
$y = f(x)$	poloha bodu v čase x (na ose y)

Platí vztah: $\quad \text{rychlost} = \dfrac{\text{dráha}}{\text{čas}}$.

Uvažujme pohyb bodu v časovém intervalu $x \in \langle a, b \rangle$. Za tento časový interval $(b-a)$ urazí bod vzdálenost $\big(f(b) - f(a)\big)$, tedy jeho průměrná rychlost na tomto intervalu je $v_P = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

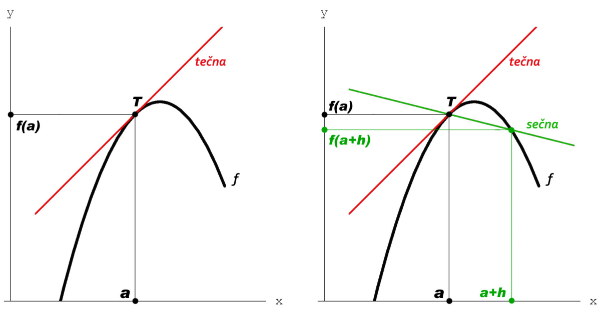
Je-li $c \in (a, b)$, pak okamžitá rychlost bodu v čase c je

$$v(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c).$$

Okamžitá rychlost je první derivací dráhy podle času.

2 Geometrický význam první derivace

2.1 Tečna a normála



Definice 3. Nechť existuje derivace $f'(a)$ v bodě a. Přímku t určenou rovnicí

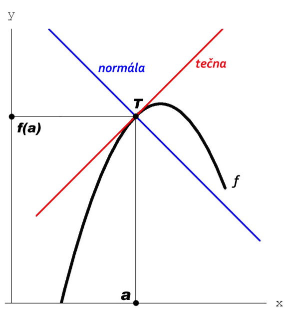
$$t : y - f(a) = f'(a)(x - a),$$

nazveme *tečnou* ke grafu funkce f v bodě grafu $T = [a, f(a)]$.

Definice 4. Nechť existuje derivace $f'(a)$ v bodě a. Přímku n určenou rovnicí

$$n: \ x = a \quad \text{pro } f'(a) = 0,$$
$$n: \ y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a) \quad \text{pro } f'(a) \neq 0,$$

nazveme *normálou* ke grafu funkce f v bodě grafu $T = [a, f(a)]$.



3 Derivace a spojitost

Věta 5. *Nechť funkce f má vlastní derivaci $f'(a)$ v bodě a. Pak funkce f je spojitá v bodě a.*

Důkaz. Označme $g(h) = \left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right)$. Platí

$$|f(a+h)-f(a)| - |f'(a)\,h| \leq |f(a+h)-f(a)-f'(a)\,h| = |h|\,\big|g(h)\big|.$$

Odtud ihned

$$|f(a+h)-f(a)| \leq \big(|g(h)|+|f'(a)|\big)\,|h| \leq c\,|h| \quad \text{pro } |h|<\delta.$$

Tedy

$$|f(a+h)-f(a)| \to 0 \quad \text{pro } h \to 0.$$

□