4. Věty o střední hodnotě, l'Hospitalovo pravidlo, asymptoty grafu

(PEF — PaA)

Petr Gurka

aktualizováno 25. října 2012

Obsah

1 Globální spojitost funkce

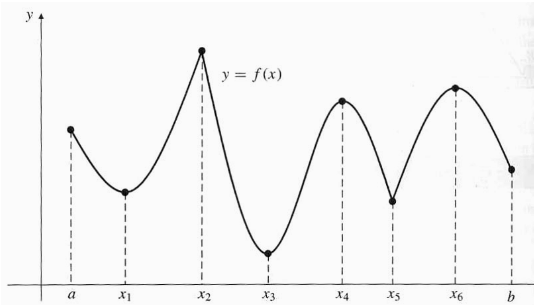
1.1 Funkce spojitá na intervalu

Definice 1. Nechť $\mathcal{J} \subset \mathcal{D}(f)$ je interval libovolného typu.

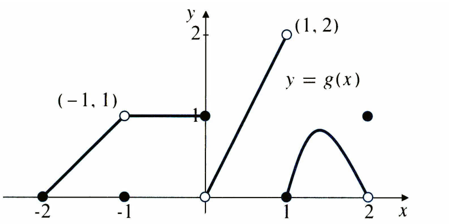
- Je-li $\mathcal{J}$ *otevřený* interval, je funkce f spojitá na $\mathcal{J}$, jestliže je spojitá v každém jeho bodě.
- Je-li $\mathcal{J}$ je *polouzavřený* nebo *uzavřený* interval, je funkce f spojitá na $\mathcal{J}$, je-li spojitá v každém jeho vnitřním bodě a jednostranně spojitá v krajních bodech. (Tj. pokud tomuto intervalu náleží jeho levý, resp. pravý, krajní bod, pak je f v tomto krajním bodě spojitá zleva, resp. zprava.)

Věta 2 (Spojitost elementárních funkcí)**.** *Nechť f je elementární funkce a nechť $\mathcal{J}$ je interval libovolného typu, který je podmnožinou definičního oboru funkce f. Potom f je spojitá na $\mathcal{J}$.*

1.2 Příklady funkcí spojitých na intervalech



Funkce na obrázku je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$.



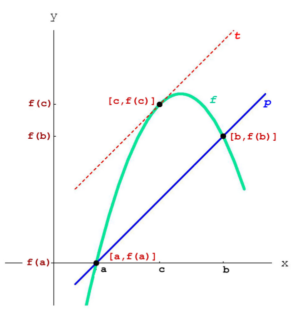
Funkce na obrázku je spojitá na intervalech $\langle -2, -1)$, $(-1, 0\rangle$, $(0, 1)$ a $\langle 1, 2)$.

2 Věty o střední hodnotě

Věta 3 (Rolleova věta o střední hodnotě)**.** *Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle \subset \mathcal{D}(f)$, má vlastní derivaci $f'(x)$ v každém bodě x otevřeného intervalu (a, b) a $f(a) = f(b)$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.*

Věta 4 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)**.** *Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle \subset \mathcal{D}(f)$ a má vlastní derivaci $f'(x)$ v každém bodě x otevřeného intervalu (a, b). Potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že platí*

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a), \quad \text{tj.} \quad k_p = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) = k_t.$$



Zobecněním Lagrangeovy věty je:

Věta 5 (Cauchyova věta o střední hodnotě). *Nechť funkce f, g jsou spojité na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle \subset \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ a mají vlastní derivace $f'(x)$, $g'(x)$ v každém bodě $x \in (a, b)$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že platí:*

$$g'(c)\left[f(b) - f(a)\right] = f'(c)\left[g(b) - g(a)\right].$$

3 L'Hospitalovo pravidlo

Věta 6. *Nechť $a, A \in \mathbb{R}^*$ (kde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$). Nechť pro funkce f, g platí:*

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$,
- *existuje* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Potom existuje $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Tvrzení věty platí také pro jednostranné limity.

Věta 7. *Nechť $a, A \in \mathbb{R}^*$. Nechť pro funkce f, g platí:*

- $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$,
- *existuje* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Potom existuje $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Tvrzení věty platí také pro jednostranné limity.

Vynecháme-li některý z předpokladů, pak tvrzení nemusí platit.

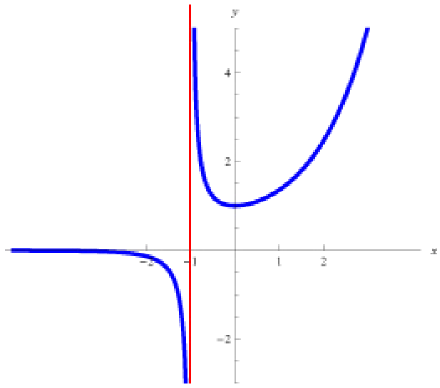
4 Asymptoty grafu funkce

Asymptotu grafu funkce chápeme jako přímku, ke které se graf funkce „neomezeně přibližuje“, jestliže se „neomezeně vzdalujeme“ od počátku soustavy souřadnic. Rozlišujeme svislé a šikmé asymptoty.

Definice 8 (Svislá asymptota). Přímku $p : x = a$ (rovnoběžnou s osou y), kde $a \in \mathbb{R}$ je takový bod, že aspoň jedna z jednostranných limit funkce f v a je nevlastní, tj.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = A \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = A, \quad \text{kde } A \in \{-\infty, \infty\},$$

nazveme svislou asymptotou grafu funkce f.



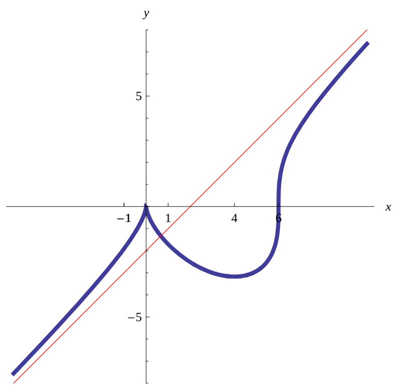
Definice 9 (Šikmé asymptoty)**.** Přímku $p : y = k\,x + q$, kde

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - k\,x\big) \quad \text{(asymptota v minus nekonečnu)}$$

nebo

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \to \infty} \big(f(x) - k\,x\big) \quad \text{(asymptota v plus nekonečnu)},$$

nazveme šikmou asymptotou grafu funkce f.



Poznámka 10. Je dobré si uvědomit, že asymptota v minus nekonečnu může mít stejnou rovnici jako asymptota v plus nekonečnu (jako na předchozím obrázku). Funkce může mít šikmou asymptotu v minus (resp. plus) nekonečnu jen tehdy, je-li definována na nějakém intervalu $(-\infty, R)$ (resp. (R, ∞)), kde $R \in \mathbb{R}$.