5. Monotonie funkce, konvexita a konkávita grafu funkce

(PEF — PaA)

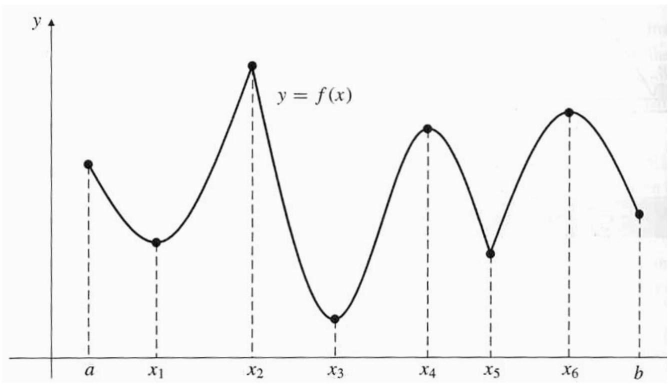
Petr Gurka

aktualizováno 1. listopadu 2012

Obsah

1 Monotonie funkce

1.1 Funkce monotonní na intervalu



Definiční obor: $\mathcal{D}(f) = \langle a, b\rangle$
Funkce f *roste* na intervalech: $\langle x_1, x_2\rangle$, $\langle x_3, x_4\rangle$, $\langle x_5, x_6\rangle$.
Funkce f *klesá* na intervalech: $\langle a, x_1\rangle$, $\langle x_2, x_3\rangle$, $\langle x_4, x_5\rangle$, $\langle x_6, b\rangle$.

Definice 1. Nechť f je funkce s definičním oborem $\mathcal{D}(f)$ a nechť $\mathcal{J} \subset \mathcal{D}(f)$ je neprázdný interval libovolného typu (tj. otevřený, uzavřený nebo polouzavřený). Řekneme, že funkce f je

- *rostoucí* na intervalu $\mathcal{J}$, jestliže pro všechny body $x_1, x_2 \in \mathcal{J}$ takové, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$;
- *klesající* na intervalu $\mathcal{J}$, jestliže pro všechny body $x_1, x_2 \in \mathcal{J}$ takové, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce, která je *rostoucí* na intervalu $\mathcal{J}$ anebo je *klesající* na intervalu $\mathcal{J}$, se nazývá *(ryze) monotonní* na intervalu $\mathcal{J}$.

1.2 Určování monotonie podle 1. derivace

Věta 2. *Nechť funkce f má vlastní první derivaci $f'(x)$ ve všech bodech otevřeného intervalu $(a, b) \subset \mathcal{D}(f)$. Potom platí*

- *je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, je funkce f rostoucí na intervalu (a, b);*
- *je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, je funkce f klesající na intervalu (a, b);*
- *je-li $f'(x) = 0$ pro každé $x \in (a, b)$, je funkce f konstantní na intervalu (a, b).*

V případě, že funkce je navíc (jednostranně) spojitá v některém z krajních bodů a, b, platí příslušná vlastnost na intervalu obsahujícím tento krajní bod (tyto krajní body).

1.3 Napojování monotonie

POZOR!
Funkce, která je rostoucí, resp. klesající, na sousedních intervalech, nemusí být rostoucí, resp. klesající, na jejich sjednocení.

Věta 3. *Nechť $a < c < b$ a f je spojitá v bodě c. Pak*

- *pokud funkce f je rostoucí na intervalech (a, c) a (c, b), je také rostoucí intervalu (a, b);*
- *pokud funkce f je klesající na intervalech (a, c) a (c, b), je také klesající intervalu (a, b).*

Tato věta má jednoduchý a významný důsledek.

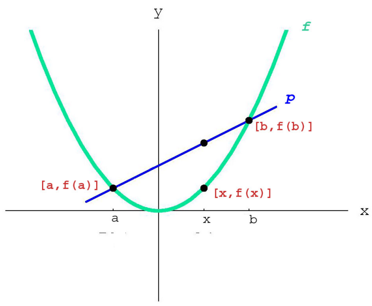
Důsledek 4. *Má-li spojitá funkce f na intervalu $\mathcal{J}$ kladnou (resp. zápornou) první derivaci s výjimkou konečně mnoha bodů, ve kterých derivaci nemá nebo ji má nulovou, pak je f na tomto intervalu rostoucí (resp. klesající).*

2 Konvexita a konkávita

2.1 Funkce konvexní a konkávní

Definice 5. Řekneme, že funkce f je *konvexní* na intervalu $\mathcal{J}$, jestliže pro všechna $a, b \in \mathcal{J}$, $a < b$, a všechna $x \in (a, b)$ je splněna nerovnost

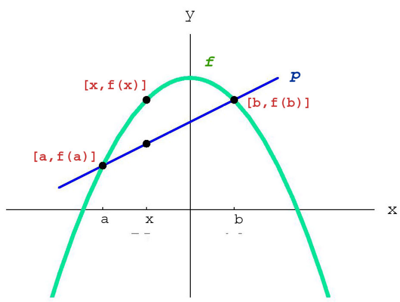
$$f(x) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$



Konvexní: spojnice bodů je nad grafem.

Definice 6. Řekneme, že funkce f je *konkávní* na intervalu $\mathcal{J}$, jestliže pro všechna $a, b \in \mathcal{J}$, $a < b$, a všechna $x \in (a, b)$ je splněna nerovnost

$$f(x) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$



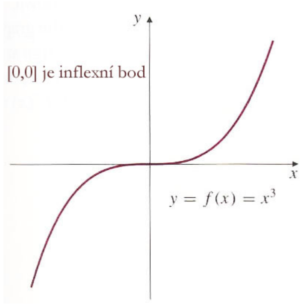
Konkávní: spojnice bodů je pod grafem.

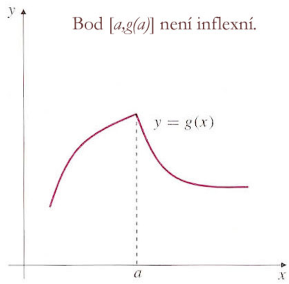
2.2 Inflexní bod grafu funkce

Definice 7 (Inflexní bod grafu)**.** Bod $A = [a, f(a)]$ je *inflexním bodem* grafu funkce f, jestliže:

- bod a je vnitřním bodem definičního oboru funkce f, (tj. pro nějaké $\delta > 0$ je $(a - \delta, a + \delta) \subset \mathcal{D}(f)$);
- funkce f má v bodě a vlastní derivaci $f'(a)$;
- na jednom z intervalů $(a - \delta, a\rangle$, $\langle a, a + \delta)$ je funkce f konvexní a na druhém z nich je konkávní.

Stručněji: v inflexním bodě má graf funkce tečnu a konvexita v něm přechází v konkávitu nebo naopak.





2.3 Určování konvexity a konkávity pomocí druhé derivace

Věta 8. *Nechť funkce f má vlastní druhou derivaci $f''(x)$ ve všech bodech otevřeného intervalu $(a,b) \subset \mathcal{D}(f)$. Potom platí*

- *je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a,b)$, je funkce f konvexní na intervalu (a,b);*
- *je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a,b)$, je funkce f konkávní na intervalu (a,b).*

V případě, že funkce je navíc (jednostranně) spojitá v některém z krajních bodů a, b, platí příslušná vlastnost na intervalu obsahujícím tento krajní bod (tyto krajní body).

2.4 Napojování konvexity a konkávity

POZOR!
Funkce, která je konvexní, resp. konkávní, na sousedních intervalech, nemusí být konvexní, resp. konkávní, na jejich sjednocení, i když je spojitá ve společném bodě těchto dvou intervalů.

Věta 9. *Nechť $a < c < b$, $\quad f''(c) = 0$. Pak*

- *pokud je $f'' > 0$ na intervalech (a,c) a (c,b), je f konvexní na intervalu (a,b);*
- *pokud je $f'' < 0$ na intervalech (a,c) a (c,b), je f konkávní na intervalu (a,b).*