6. Extrémy funkce (lokální a globální), vyšetřování průběhu funkce

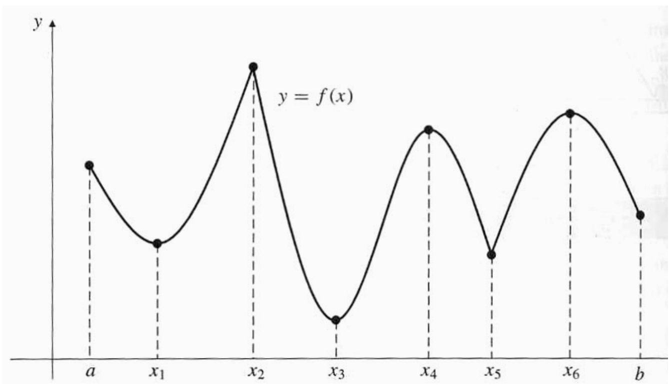
(PEF — PaA)

Petr Gurka

aktualizováno 7. listopadu 2012

Obsah

1 Extrémy funkce



Definiční obor: $\mathcal{D}(f) = \langle a, b \rangle$
Lokální *minima* v bodech: x_1, x_3, x_5.
Lokální *maxima* v bodech: x_2, x_4, x_6.
V krajních bodech a, b *nejsou* lokální extrémy
Globální *minimum* je v bodě x_3, globální *maximum* je v bodě x_2.

1.1 Lokální extrémy

Definice 1. Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathcal{D}(f)$

- *lokální minimum*, jestliže existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in (a - \delta, a + \delta)$ je $f(x) \geq f(a)$;

- *lokální maximum*, jestliže existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in (a-\delta, a+\delta)$ je $f(x) \leq f(a)$.

Říkáme, že lokální maximum (resp. lokální minimum) je *ostré*, jestliže je nerovnost ostrá, když $\delta > 0$ je dostatečně malé a $x \neq a$.

Důležité.
Nutně $(a-\delta, a+\delta) \subset \mathcal{D}(f)$, tj. lokální extrémy mohou být pouze ve *vnitřních* bodech definičního oboru, tedy nikoliv v krajních bodech.

Nutná podmínka pro existenci lokálního extrému

Věta 2. *Má-li funkce f v bodě $a \in \mathcal{D}(f)$ lokální extrém a existuje-li vlastní derivace $f'(a)$ v bodě a, potom $f'(a) = 0$.*

Poznámka 3 (Výhoda)*.* Snadný výpočet: podezřelé body najdeme jako řešení rovnice $f'(x) = 0$.

Poznámky 4 (Nevýhody)*.*

- Najdeme i body, ve kterých nejsou extrémy.
- Nenajdeme body, ve kterých jsou lokální extrémy a funkce v nich nemá derivaci.

Postačující podmínky pro existenci lokálního extrému

Věta 5 (Lokální extrémy funkce jedné proměnné na základě monotonie)**.** *Nechť $a < c < b$ a f je spojitá v bodě c. Pak*

- *pokud funkce f je rostoucí na intervalu (a, c) a klesající na intervalu (c, b), má v bodě c ostré lokální maximum;*
- *pokud funkce f je klesající na intervalu (a, c) a rostoucí na intervalu (c, b), má v bodě c ostré lokální minimum.*

Důsledek 6. *Nechť funkce f je spojitá v bodě a a má vlastní derivace $f'(x)$ v intervalech $(a-\delta, a)$, $(a, a+\delta)$ pro nějaké $\delta > 0$. Potom platí:*

- *je-li $f'(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a-\delta, a)$ a $f'(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, a+\delta)$, pak funkce f má v bodě a lokální maximum;*
- *je-li $f'(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a-\delta, a)$ a $f'(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, a+\delta)$, pak funkce f má v bodě a lokální minimum.*

Jsou-li v předchozích předpokladech všechny nerovnosti ostré, jedná se o příslušný ostrý lokální extrém.

Věta 7. *Nechť funkce f má ve vnitřním bodě $a \in \mathcal{D}(f)$ vlastní první a druhou derivaci. Je-li $f'(a) = 0$ a $f''(a) \neq 0$, pak*

- *je-li $f''(a) < 0$, má funkce f v bodě a ostré lokální maximum;*
- *je-li $f''(a) > 0$, má funkce f v bodě a ostré lokální minimum.*

Poznámka 8*.* Nevýhodou je, že věta neřeší situaci, kdy $f'(a) = 0$ a $f''(a) = 0$.

1.2 Globální extrémy funkce jedné proměnné

Definice 9. Nechť f je funkce s definičním oborem $\mathcal{D}(f)$ a $\emptyset \neq M \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in M$ *globální maximum* (resp. *globální minimum*) *na množině* M, jestliže pro každý bod $x \in M$ platí

$$f(x) \leq f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(a)).$$

Globální maxima a globální minima souhrnně nazýváme *globálními extrémy*. Jsou-li nerovnosti ostré pro $x \neq a$, hovoříme o ostrých globálních extrémech.

Poznámka 10. Místo termínu globální extrém se používá také termín absolutní extrém. Podobně se místo termínu lokální extrém používá termín relativní extrém.

Postačující podmínky pro existenci globálního extrému

Věta 11 (Weierstrass)**.** *Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle \subset \mathcal{D}(f)$. Potom existují body $c_1, c_2 \in \langle a, b\rangle$ takové, že funkce f má v bodě c_1 globální maximum a v bodě c_2 globální minimum na intervalu $\langle a, b\rangle$.*

Poznámka 12. Spojitá funkce na uzavřeném intervalu má globální extrémy buď v bodech, ve kterých má lokální extrémy, nebo v krajních bodech.

2 Vyšetřování průběhu funkce

Konkrétně se vyšetřuje toto:

- definiční obor funkce,
- elementární vlastnosti funkce (tj. průsečíky s osami, symetrie grafu apod.),
- chování funkce v krajních bodech definičního oboru (tj. limity v krajních bodech, asymptoty grafu),
- intervaly monotonie, extrémy,
- konvexita, konkávita, inflexní body grafu,
- funkční hodnoty v důležitých bodech

Nakonec na základě vyšetřených vlastností sestrojíme graf funkce.