7. Primitivní funkce, neurčitý integrál

(PEF — PaA)

Petr Gurka

aktualizováno 15. listopadu 2012

Obsah

1 Primitivní funkce

1.1 Definice primitivní funkce

Definice 1. Nechť f a F jsou funkce definované na intervalu $\mathcal{J}$. Funkce F je *primitivní funkcí* k funkci f na intervalu $\mathcal{J}$, jestliže pro každý bod $x \in \mathcal{J}$ tohoto intervalu platí $F'(x) = f(x)$. Pokud k intervalu $\mathcal{J}$ náleží některý z jeho krajních bodů, pak v tomto bodě uvažujeme příslušnou jednostrannou derivaci.

1.2 Existence primitivní funkce

Věta 2. *Je-li f funkce spojitá na intervalu $\mathcal{J}$, pak k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce F.*

Tato věta má jednoduchý důsledek.

Důsledek 3. *Je-li f elementární funkce definovaná na intervalu $\mathcal{J}$, pak k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce F.*

1.3 Neurčitý integrál

Věta 4. *Nechť funkce F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu $\mathcal{J}$. Potom funkce G, $G(x) = F(x) + C$, $x \in \mathcal{J}$, kde $C \in \mathbb{R}$ je konstanta, je také primitivní funkcí k f na intervalu $\mathcal{J}$.*

Věta 5. *Nechť funkce F a G jsou primitivní k funkci f na intervalu $\mathcal{J}$. Potom existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{J}$ je $G(x) = F(x) + C$.*

Definice 6 (Neurčitý integrál)**.** Množina všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu $\mathcal{J}$ se nazývá *neurčitý integrál* funkce f na intervalu $\mathcal{J}$. Pro neurčitý integrál používáme zápis

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

kde dx je *diferenciál integrační proměnné* (označuje, co je proměnná), $F(x)$ je nějaká *primitivní funkce k funkci* $f(x)$ (tj. reprezentant množiny všech primitivních funkcí k f) a $C \in \mathbb{R}$ je *integrační konstanta.*

2 Výpočet neurčitého integrálu

2.1 Pravidla pro integrování

Věta 7. *Nechť funkce f, g mají na intervalu $\mathcal{J}$ primitivní funkce. Potom také funkce $(f+g)$, $(f-g)$ a $c\,f$, $c \in \mathbb{R}$, mají na $\mathcal{J}$ primitivní funkce a platí*

$$\begin{aligned}
\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,\mathrm{d}x,\\
\int (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,dx - \int g(x)\,\mathrm{d}x,\\
\int cf(x)\,\mathrm{d}x &= c\int f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Důležité!
Neexistují žádné vzorce pro přímé integrování součinu a podílu dvou funkcí.

2.2 Metoda přímé integrace

Provádějí se pouze základní algebraické úpravy výrazů a používají se základní integrační vzorce a pravidla.

2.3 Metoda integrace per partes

Věta 8 (Metoda integrace per partes)**.** *Nechť funkce u, v mají spojité derivace u' a v' na intervalu $\mathcal{J}$. Potom na tomto intervalu platí*

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.4 Metoda integrace substitucí

Věta 9 (Metoda integrace substitucí)**.** *Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\mathcal{I}$ a F je funkce k ní primitivní na $\mathcal{I}$. Dále předpokládejme, že funkce g má první derivaci $g'(x)$ ve všech bodech $x \in \mathcal{J}$ a že $g(x) \in \mathcal{I}$ pro každé $x \in \mathcal{J}$. Pak složená funkce $F(g(x))$ je primitivní funkcí k funkci $f(g(x))g'(x)$ na intervalu $\mathcal{J}$.*