8. Určitý integrál

(PEF — PaA)

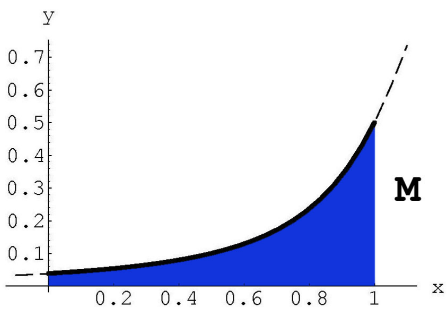
Petr Gurka

aktualizováno 22. listopadu 2012

Obsah

1 Definice určitého integrálu

Uvažujme funkci f, která je nezáporná a spojitá na uzavřeném intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$. Chceme určit obsah rovinného útvaru M ohraničeného shora grafem funkce f (tj. křivkou o rovnici $y = f(x)$, $x \in \langle\alpha, \beta\rangle$), zdola osou x, zleva přímkou o rovnici $x = \alpha$ a zprava přímkou o rovnici $x = \beta$.



Myšlenka výpočtu obsahu.
Rovinný *útvar* M *nahradit jednodušším útvarem*, jehož obsah umíme vypočítat, a navíc takovým, že se jeho obsah příliš neliší od obsahu $P(M)$ útvaru M.

Rozdělme interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ na několik dílků dělícími body $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \langle \alpha, \beta \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, přičemž klademe $x_0 = \alpha$ a $x_n = \beta$, tj.

$$\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = \beta,$$

a uvažujme rovinný útvar Q, který je sjednocením obdélníků se základnami $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a s výškami délky $f(c_i)$, kde c_i jsou vhodně vybrané body z příslušných intervalů $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 0, 1, \ldots, n$. *Obsah* $P(Q)$ útvaru Q *jsme schopni* díky znalosti obsahu obdélníka *vypočítat přesně*, je totiž

$$P(Q) = f(c_1)\,(x_1 - x_0) + f(c_2)\,(x_2 - x_1) + \cdots + f(c_n)\,(x_n - x_{n-1}).$$

Volíme-li c_i tak, že

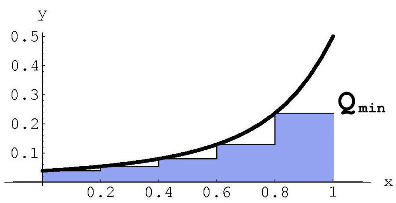
$$f(c_i) = \min_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x), \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

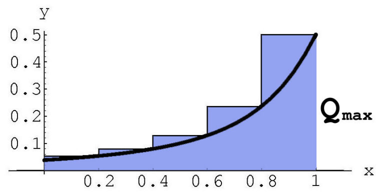
je příslušný útvar $Q_{\min}$ *vepsaný* množině M. Volíme-li c_i tak, že

$$f(c_i) = \max_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x), \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

je příslušný útvar $Q_{\max}$ *opsaný* množině M, přičemž pro obsahy platí

$$P\big(Q_{\min}\big) \leq P\big(M\big) \leq P\big(Q_{\max}\big)$$





Nahradíme-li přesný obsah $P\big(M\big)$ číslem $P(Q)$ s libovolným výběrem bodů c_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, je *chyba*, které se dopustíme, *nejvýše* $P\big(Q_{max}\big) - P\big(Q_{min}\big)$.

1.1 Riemannův určitý integrál

Definice 1 (Dělení intervalu, integrální součet)**.** Dán uzavřený interval $\langle \alpha, \beta \rangle$. Množinu bodů

$$D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \langle \alpha, \beta \rangle$$

splňující podmínku

$$\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = \beta$$

nazveme *dělením intervalu* $\langle \alpha, \beta \rangle$. *Norma dělení* D je číslo $\nu(D)$, které je rovno největší vzdálenosti dvou sousedních bodů dělení D, tj.

$$\nu(D) = \max_{i \in \{0,1,\ldots,n\}} (x_i - x_{i-1}).$$

Pro dané dělení D nechť $B = \{c_1, \ldots, c_n\}$ je množina bodů z intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, že $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Označme

$$s(f, D, B) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

integrální součet příslušný dělení D a množině B.

Určitý integrál $\quad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{\nu(D)\to 0} s(f,D,B)$,

přičemž limita *nezávisí* na volbě množin D, B.

Definice 2 (Riemannův integrál)**.** Nechť f je omezená funkce na uzavřeném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Existuje-li číslo R, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro libovolné dělení D intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ s normou $\nu(D) < \delta$ a pro libovolná čísla $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$, platí

$$\left| R - \sum_{i=1}^n f(c_i)\,(x_i - x_{i-1}) \right| = |R - s(f,D,B)| < \varepsilon,$$

pak řekneme, že funkce f je *riemannovsky integrovatelná* na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Číslo R nazveme Riemannovým určitým integrálem funkce f na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Píšeme

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = R.$$

Pokud žádné číslo R uvedených vlastností *neexistuje*, říkáme, že funkce f *nemá* na $\langle \alpha, \beta \rangle$ Riemannův integrál.

Věta 3 (Riemannovská integrovatelnost)**.** *Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, pak je také riemannovsky integrovatelná na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$.*

1.2 Souvislost určitého a neurčitého integrálu

Věta 4 (Newtonova-Leibnizova formule)**.** *Nechť funkce f je riemannovsky integrovatelná na uzavřeném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a nechť existuje funkce F, která je primitivní funkce k f na $\langle \alpha, \beta \rangle$. Potom platí rovnost (Newtonova-Leibnizova formule)*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha). \tag{1}$$

(Předpoklady věty jsou splněny pro f spojitou na $\langle \alpha, \beta \rangle$.)

Poznámka 5. Určitý integrál je možno také definovat pomocí (1). Takový integrál se nazývá *Newtonův určitý integrál.*

Definice 6. Nechť $\alpha > \beta$, pak vzhledem k (1) definujeme

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx,$$

dále definujeme

$$\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx = 0.$$

2 Metody výpočtu určitého integrálu

2.1 Základní vzorce

Věta 7. *Nechť $\alpha < \gamma < \beta$, $c \in \mathbb{R}$. Potom platí rovnosti*

$$\int_{\alpha}^{\beta} c\, f(x)\, dx = c \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \big(f(x) \pm g(x)\big)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \pm \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\, dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\, dx,$$

pokud určité integrály na obou stranách rovností existují.

2.2 Metoda per partes pro určitý integrál

Označení
Pro číslo $F(\beta) - F(\alpha)$ na pravé straně rovnosti Newtonovy-Leibnizovy formule (1) budeme používat následující značení

$$F(\beta) - F(\alpha) = \big[F(x)\big]_{\alpha}^{\beta}.$$

Věta 8 (Metoda per partes pro určitý integrál)**.** *Nechť funkce u, v mají spojité derivace u', v' na uzavřeném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Potom platí rovnost*

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x)\, v'(x)\, dx = \big[u(x)\, v(x)\big]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} u'(x)\, v(x)\, dx.$$

2.3 Substituční metoda pro určitý integrál

Věta 9 (Substituční metoda pro určitý integrál)**.** *Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle A, B \rangle$. Nechť g je funkce, která má spojitou první derivaci g' na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a platí*

$$g(x) \in \langle A, B \rangle \quad \text{pro všechny body } x \in \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Potom platí rovnost

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(g(x)\big)\, g'(x)\, dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(t)\, dt.$$

Pozor!
Při substituci v určitém integrálu a při záměně mezí se nevracíme k původní proměnné jako u neurčitého integrálu.