

9. Aplikace určitého integrálu

(PEF — PaA)

Petr Gurka

aktualizováno 26. listopadu 2015

Obsah

1 Aplikace určitého integrálu	1
1.1 Výpočet obsahu elementární oblasti v rovině	1
1.2 Výpočet obsahu rovinného útvaru	2
1.3 Objem rotačního tělesa	2
1.4 Délka křivky	2
1.5 Plášť rotačního tělesa	3

1 Aplikace určitého integrálu

1.1 Výpočet obsahu elementární oblasti v rovině

Obsah elementární oblasti

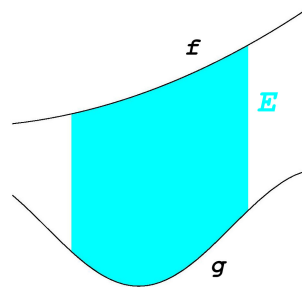
Nechť funkce f, g jsou **spojité** na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a necht' pro všechna $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$ platí $g(x) \leq f(x)$. Rovinný útvar

$$E = \{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \leq x \leq \beta, g(x) \leq y \leq f(x) \}$$

nazveme *elementární oblastí* příslušné funkcím f, g na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Obsah elementární oblasti je roven

$$P(E) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx.$$



1.2 Výpočet obsahu rovinného útvaru

Při výpočtu využijeme:

Aditivita.

Je-li rovinný útvar A sjednocením dvou nepřekrývajících se rovinných útvarů B , C (tj. takových, které nemají společné vnitřní body), potom

$$P(A) = P(B) + P(C).$$

Rovnost.

Jsou-li A , B dva shodné rovinné útvary (např. A vznikne z B posunutím), potom

$$P(A) = P(B).$$

Příklad 1. Vypočítejte obsah rovinného útvaru ohraničeného křivkami

$$x + y = 0, \quad y = \frac{3}{2}x^2 - 4x.$$

[2]

Příklad 2. Vypočítejte obsah rovinného útvaru ohraničeného křivkami

$$y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt{3x - 12}, \quad y = 0.$$

$[\frac{8}{3}\sqrt{6}]$

1.3 Objem rotačního tělesa

Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ kolem osy x

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Příklad 3. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného křivkami $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 3$, kolem osy x .

$[8\pi]$

1.4 Délka křivky

Délka oblouku grafu funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Příklad 4. Určete délku oblouku grafu funkce $y = \ln x$, $x \in \langle \sqrt{3}, \sqrt{8} \rangle$.

$[1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}]$

1.5 Plášť rotačního tělesa

Obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ kolem osy x

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Příklad 5. Vypočítejte obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného křivkou $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$, kolem osy x .
[$\pi(e^2 + 4 - e^{-2})$]