10. Soustavy lineárních rovnic, determinanty, Cramerovo pravidlo

(PEF – PaA)

Petr Gurka

aktualizováno 9. prosince 2012

Obsah

1 Základní pojmy

1.1 Motivace

Uvažujme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 5y & & & = & 9 \\ 3x & + & 6y & - & 2z & = & 6 \end{array} . \tag{1}$$

Vyřešit soustavu (1) znamená najít čísla x, y, z, která vyhovují všem třem rovnicím této soustavy.

Všechny rovnice v soustavě jsou ve tvaru, kdy stejné neznámé jsou zapsány pod sebou. Soustavu můžeme zapsat do matice:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right). \tag{2}$$

Zápisu (2) říkáme *maticový zápis soustavy* (1), příslušné tabulce čísel, která reprezentuje tento zápis říkáme *matice* (přesněji, *rozšířená matice soustavy* (1)).

Dále si všimněme, že soustavu (1) je možné zapsat také pomocí „lineární kombinace aritmetických vektorů“, tj. jako rovnici

$$x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\9\\6\end{pmatrix}.$$

1.2 Aritmetický vektorový prostor

Uspořádané n-tice reálných čísel (např. řádky nebo sloupce matice) můžeme násobit reálným číslem a můžeme je sčítat.

Definice 1 (Aritmetický vektorový prostor)**.** Symbolem $\mathbf{V}_n$, $n \in \mathbb{N}$, budeme značit *aritmetický vektorový prostor*, který je tvořen uspořádanými n-ticemi reálných čísel, tj.

$$\mathbf{V}_n = \{(a_1,\dots,a_n) \mid a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Prvky prostoru $\mathbf{V}_n$ se nazývají vektory. Definujeme součet vektorů a (reálný) násobek vektoru (po složkách):

součet vektorů	$(a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n)=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n),$
násobek vektoru	$r\,(a_1,\dots,a_n)=(r\,a_1,\dots,r\,a_n).$

Vektory budeme značit malými tučnými písmeny, např. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Vektor $\mathbf{o}=(0,\dots,0)$ se nazývá *nulový vektor* a vektor $-\mathbf{a}=(-a_1,\dots,-a_n)$ se nazývá *opačný vektor* k vektoru $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_n)$.

1.3 Matice

Definice 2. Maticí $\boldsymbol{A}$ typu (m,n) nazveme soubor mn reálných čísel zapsaných do m řádků a n sloupců ve tvaru

$$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{i=1,\ j=1}^{\ m\quad\ n}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Vektory $\mathbf{a}_1=(a_{11},\dots,a_{1n})$, $\mathbf{a}_2=(a_{21},\dots,a_{2n})$, $\dots$, $\mathbf{a}_m=(a_{m1},\dots,a_{mn})$ z aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$ se nazývají *řádkové vektory* (stručněji řádky) matice $\boldsymbol{A}$, vektory $\widetilde{\mathbf{a}}_1=(a_{11},\dots,a_{m1})$, $\dots$, $\widetilde{\mathbf{a}}_n=(a_{1n},\dots,a_{mn})$ z aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{V}_m$ se nazývají *sloupcové vektory* (stručněji sloupce) matice $\boldsymbol{A}$. Matice $\boldsymbol{O}$, která obsahuje pouze nuly, tj. $a_{ij}=0$ pro $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$, se nazývá *nulová matice*.

1.4 Lineární závislost a nezávislost

Definice 3. Řekneme, že vektory $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k$ jsou *lineárně nezávislé*, jestliže platí následující podmínka:

$$\text{kdykoliv}\quad r_1\,\mathbf{u}_1+\dots+r_k\,\mathbf{u}_k=\mathbf{o},\quad\text{potom}\quad r_1=r_2=\dots=r_k=0$$

(tj. nulový vektor $\mathbf{o}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ s koeficienty $r_1, \dots, r_k$, jen pro $r_1, \dots, r_k$ nulové). Vektory, které nejsou lineárně nezávislé, se nazývají *lineárně závislé*.

Poznámka 4.

- Jeden vektor $\mathbf{u}$ je lineárně *závislý* právě tehdy, když je *nulový*.
- Dva vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně *závislé*, právě když je jeden z nich násobkem druhého.
- Je-li jeden z vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ možno vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních, potom jsou tyto vektory lineárně *závislé*.

Definice 5. Matice $\boldsymbol{B}$ je *ekvivalentní* matici $\boldsymbol{A}$, tj. $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, jestliže $\boldsymbol{B}$ získáme z $\boldsymbol{B}$ provedením následujících elementárních úprav na řádky matice $\boldsymbol{A}$:

(a) záměna pořadí řádků;

(b) vynásobení některého řádku matice nenulovým reálným číslem;

(c) přičtení libovolného násobku některého řádku matice k jinému řádku matice;

(d) vynechání nulového řádku matice, pokud tento není jediným řádkem matice;

(e) za předpokladu, že matice obsahuje dva řádky, z nichž jeden je nenulovým násobkem druhého, vynechání jednoho z těchto řádků (kteréhokoliv).

1.5 Hodnost matice, matice v Gaussově tvaru

Definice 6. Hodnost matice $\boldsymbol{A}$ je celé nezáporné číslo $\mathrm{h}(\boldsymbol{A})$, které je této matici přiřazeno takto:

- Hodnost nulové matice je nula, tj. $\mathrm{h}(\boldsymbol{O}) = 0$.
- Pro nenulovou $\boldsymbol{A}$ je $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = k$, jestliže matice $\boldsymbol{A}$ obsahuje k lineárně nezávislých řádků a každá skupina jejích $(k+1)$ řádků je lineárně závislá.

Věta 7. *Má-li matice $\boldsymbol{A}$ všechny řádky lineárně nezávislé, potom je její hodnost rovna počtu řádků.*

Věta 8. *Jsou-li $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ ekvivalentní matice, pak mají stejnou hodnost.*

Definice 9 (Gaussův tvar matice)**.** Řekneme, že nenulová matice $\boldsymbol{B}$ je v *Gaussově tvaru*, jestliže první nenulové číslo jejího každého řádku (uvažováno zleva doprava) je zároveň posledním nenulovým číslem v příslušném sloupci (uvažováno shora dolů).

Příklad 10. Pro názornost uveďme dvě matice, které *jsou* v Gaussově tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na druhé straně, matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

není v Gaussově tvaru.

Věta 11. *Každá matice v Gaussově tvaru má lineárně nezávislé řádky.*

Důsledek 12. *Je-li $\boldsymbol{B}$ matice v Gaussově tvaru, potom je její hodnost $\mathrm{h}(\boldsymbol{B})$ rovna počtu jejích řádků.*

Věta 13. *Ke každé nenulové matici $\boldsymbol{A}$ existuje matice $\boldsymbol{B}$ v Gaussově tvaru taková, že $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.*

K dané matici $\boldsymbol{A}$ můžeme najít více matic $\boldsymbol{B}$ v Gaussově tvaru s ní ekvivalentních, všechny takové matice $\boldsymbol{B}$ však mají *stejný* počet řádků.

Důsledek 14. *Hodnost nenulové matice $\boldsymbol{A}$ je rovna počtu řádků matice $\boldsymbol{B}$ v Gaussově tvaru takové, že $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.*

1.6 Gaussova eliminace

Gaussova eliminační metoda spočívá ve vhodném používání elementárních úprav (a)–(e) na řádky výchozí matice $\boldsymbol{A}$. Stručně řečeno, nejdříve pomocí úpravy (a) zařídíme, aby prvek v levém horním rohu matice (tím rozumíme prvek matice v prvním řádku, uvažováno shora dolů, a v prvním *nenulovém* sloupci, uvažováno zleva doprava) byl nenulový (je výhodné, když toto číslo je 1 nebo -1). Pak přičítáním vhodných násobků horního řádku k řádkům pod ním (úprava (c)) zařídíme, aby pod tímto prvkem byly v příslušném sloupci nuly. V dalším kroku vynecháme v matici nulové řádky a řádky, které jsou násobky řádků nad nimi (úpravy (d) a (e)). V případě, že nejsme ještě hotovi, tj. když výsledná matice ještě není v Gaussově tvaru, celý postup zopakujeme s tím, že nyní pokračujeme o řádek níže. Jelikož výchozí matice měla konečný počet řádků, musíme po konečném počtu kroků získat výslednou matici v Gaussově tvaru.

2 Řešitelnost soustavy, tvar řešení

Definice 15. Soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & +\ldots+ & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & +\ldots+ & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & +\ldots+ & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}, \qquad (3)$$

kde a_{ij}, b_i, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, jsou daná reálná čísla, nazveme *homogenní*, pokud $b_1 = \cdots = b_m = 0$. Je-li aspoň jedno z čísel $b_1, \ldots, b_m$ nenulové, nazveme danou soustavu *nehomogenní*.

Vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, jehož složky $x_1, \ldots, x_n$ vyhovují všem rovnicím soustavy, nazveme *řešením soustavy*.

Definice 16. Matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se nazývá *matice soustavy* (3). Matice

$$(\boldsymbol{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

s přidaným sloupcem pravých stran k matici $\boldsymbol{A}$ se nazývá *rozšířená matice soustavy* (3).

2.1 Homogenní soustavy

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & +\dots+ & a_{1n}\,x_n & = & 0 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & +\dots+ & a_{2n}\,x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & +\dots+ & a_{mn}\,x_n & = & 0 \end{array} \tag{4}$$

Pro homogenní soustavu (4) platí:

- Nulový vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$ je vždy řešením homogenní soustavy.
- Je-li $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = n$, tj. hodnost matice soustavy je rovna počtu neznámých, (je-li $m = n$, pak $\boldsymbol{A}$ *se nazývá regulární*) a nulový vektor je *jediným* řešením homogenní soustavy.
- Je-li $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) < n$, tj. hodnost matice soustavy je menší než počet neznámých, pak řešení $\mathbf{x}$ je nekonečně mnoho, každé lze vyjádřit jako lineární kombinaci $n - \mathrm{h}(\boldsymbol{A})$ lineárně nezávislých řešení.

2.2 Nehomogenní soustavy

Věta 17 (Frobeniova věta)**.** *Nehomogenní soustava lineárních rovnic* (3) *je řešitelná právě tehdy, když* $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{h}\big((\boldsymbol{A}|\mathbf{b})\big)$*, tj. hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.*

Tvar řešení nehomogenní soustavy.
Je-li soustava (3) řešitelná, pak všechna její řešení jsou tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, kde $\mathbf{u}$ je jedno (kterékoliv) řešení soustavy (3) a $\mathbf{v}$ je libovolné řešení příslušné homogenní soustavy (4).

3 Determinanty, Cramerovo pravidlo

Ke každé čtvercové matici je možné přiřadit jisté *reálné číslo*, které nazveme *determinantem* této matice.

Definice 18. Je-li $\boldsymbol{A}$ matice řádu n, definujeme její *determinant* následujícím způsobem

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in \Pi n} (-1)^{k_\pi} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}.$$

Symbolem Π_n značíme množinu všech permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Pro $\pi \in \Pi_n$ je k_π *počet všech inverzí* permutace π.

3.1 Výpočet determinantu řádu 1, 2 a 3

1. Pro $n = 1$ je $\det(a) = a$.
2. Pro $n = 2$ máme
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
(tj. součin prvků na hlavní diagonále minus součin prvků na vedlejší diagonále).
3. Pro $n = 3$ lze použít tzv. *Sarrusovo pravidlo*:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Pozor!!!
Žádné podobné pravidlo neplatí pro $n \geq 4$.

3.2 Cramerovo pravidlo

Uvažujme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \dots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \tag{5}$$

s *regulární* maticí soustavy $\boldsymbol{A}$. Nechť $\boldsymbol{A}_{(j)}$ značí matici, která vznikne z matice soustavy $\boldsymbol{A}$ nahrazením jejího j-tého sloupce, $j \in \{1, \dots, n\}$, sloupcem $\mathbf{b}$

pravých stran, tj.

$$\boldsymbol{A}_{(j)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Potom pro vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ řešení soustavy (5) platí

$$x_j = \frac{\det \boldsymbol{A}_{(j)}}{\det \boldsymbol{A}}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$