11. Maticová algebra

(PEF — PaA)

Petr Gurka

aktualizováno 12. prosince 2012

Obsah

1 Vektorový prostor matic typu (m, n)

Matice typu (m, n)

Definice 1. Maticí $\boldsymbol{A}$ typu (m, n) nazveme soubor mn reálných čísel zapsaných do m řádků a n sloupců ve tvaru

$$\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{i=1,\ j=1}^{m\ \ \ \ n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vektory $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})$, $\mathbf{a}_2 = (a_{21}, \dots, a_{2n})$, …, $\mathbf{a}_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})$ z aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$ se nazývají *řádkové vektory* (stručněji řádky) matice $\boldsymbol{A}$, vektory $\widetilde{\mathbf{a}}_1 = (a_{11}, \dots, a_{m1})$, …, $\widetilde{\mathbf{a}}_n = (a_{1n}, \dots, a_{mn})$ z aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{V}_m$ se nazývají *sloupcové vektory* (stručněji sloupce) matice $\boldsymbol{A}$.

Definice 2. Je-li $\boldsymbol{A}$ matice typu (m, n), pak *matice transponovaná* $\boldsymbol{A}^T$ k matici $\boldsymbol{A}$, je matice typu (n, m) která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vzájemnou výměnou řádků za sloupce,

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Prvky a_{ii}, kde $i = 1, 2, \ldots, k$, $k = \min\{m, n\}$, tvoří *hlavní diagonálu* matice $\boldsymbol{A}$ (také hlavní diagonálu matice $\boldsymbol{A}^T$).

1.1 Součet matic, násobek matice

Definice 3. Součet matic, násobek matice. Symbolem $\mathbf{M}_{m,n}$ označíme vektorový prostor všech matic typu (m, n) s následujícími operacemi. *Součtem dvou matic* typu (m, n)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

rozumíme matici

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \ldots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Je-li $r \in \mathbb{R}$, pak *r-násobkem matice* $\boldsymbol{A}$ rozumíme matici

$$r\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} r\,a_{11} & r\,a_{12} & \ldots & r\,a_{1n} \\ r\,a_{21} & r\,a_{22} & \ldots & r\,a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r\,a_{m1} & r\,a_{m2} & \ldots & r\,a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Je-li $\boldsymbol{O}$ nulová matice typu (m, n), pak pro každou matici $\boldsymbol{A}$ typu (m, n) je $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$. Dále definujme *rozdíl matic* $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ jako matici $\boldsymbol{A} + (-1)\boldsymbol{B}$.

2 Maticové rovnice

2.1 Součin matic

Definice 4. Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ je matice typu (m, p) a $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ je matice typu (p, n). *Součinem* $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$ matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ rozumíme matici $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ typu (m, n), kde každý prvek c_{ij} je skalárním součinem *i-tého řádku* matice $\boldsymbol{A}$ s *j-tým sloupcem* matice $\boldsymbol{B}$, tj.

$$c_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \widetilde{\mathbf{b}}_j = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad \text{kde } i = 1, 2, \ldots, m, \;\; j = 1, 2, \ldots, n.$$

POZOR !!!
Násobení matic obecně není komutativní, tj. $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$ nemusí být totéž jako $\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}$.

- Výsledek násobení může být při záměně pořadí pokaždé jiného typu.

- Může se stát, že má smysl pouze jeden ze součinů $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}$.
- Rovnost $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}$ nemusí platit, ani když jsou oba součiny stejného typu.

2.2 Jednotková matice

Definice 5.
- Matice $\boldsymbol{A}$ typu (n, n) se nazývá *čtvercová matice řádu* n (nebo také *stupně* n).
- Čtvercovou matici $\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)$ nazveme *diagonální*, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechny dvojice indexů $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, tj. diagonální matice obsahuje mimo hlavní diagonálu pouze nuly.
- Diagonální matice $\boldsymbol{E} = (e_{ij})$ se nazývá *jednotková*, jestliže všechny její diagonální prvky jsou rovny jedné, tj. jestliže platí $e_{ij} = 0,\ i \neq j$, a $e_{ii} = 1$ pro všechna $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Jednotkovou matici řádu n budeme značit $\boldsymbol{E}$, případně $\boldsymbol{E}_n$, tj.

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{atd.}$$

Věta 6. *Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ jsou matice, $r \in \mathbb{R}$. Pak platí (pokud jsou příslušné součiny definovány):*

$$\begin{aligned}
&r(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}) = (r\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(r\boldsymbol{B}) \\
&\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C} && (1)\\
&(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C} && (2)\\
&(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}) && (3)\\
&0\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}, \quad \boldsymbol{A}\,0 = \boldsymbol{O} \\
&\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

Rovnosti (1) *a* (2) *se nazývají distributivní zákony, rovnost* (3) *je asociativní zákon.*

2.3 Inverzní matice

Definice 7. Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou čtvercové matice řádu n. Řekneme, že matice $\boldsymbol{B}$ je *inverzní* k matici $\boldsymbol{A}$, jestliže platí $\quad \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$.

Definice 8. Čtvercová matice $\boldsymbol{A}$ řádu n se nazývá *regulární*, jestliže její hodnost $\mathrm{h}(\boldsymbol{A})$ je rovna n. Čtvercová matice, která není regulární, se nazývá *singulární*.

Věta 9. *Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice řádu n. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- *matice $\boldsymbol{A}$ je regulární;*

- *existuje čtvercová matice* $\boldsymbol{B}$ *řádu* n *taková, že* $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$*;*
- *existuje čtvercová matice* $\boldsymbol{C}$ *řádu* n *taková, že* $\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$*.*

Nutně $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ *a tato matice je inverzní k matici* $\boldsymbol{A}$*.*

Inverzní matici k matici $\boldsymbol{A}$ *budeme značit* $\boldsymbol{A}^{-1}$.

2.4 Výpočet inverzní matice (Jordanova eliminace)

K dané čtvercové regulární matici $\boldsymbol{A}$ řádu n utvoříme matici $\big(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\big)$ typu $(n, 2n)$. Pomocí vhodných elementárních úprav na řádky této matice chceme získat v levé polovině matice (tj. na místě matice $\boldsymbol{A}$) jednotkovou matici řádu n. Na pravé straně (tj. na místě matice $\boldsymbol{E}$) vyjde matice inverzní k matici $\boldsymbol{A}$.

$$\big(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\big) \overset{\text{Gaussova eliminace na } \boldsymbol{A}}{\sim \cdots \sim} \big(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{C}\big) \overset{\text{zpětný chod}}{\sim \cdots \sim} \big(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{A}^{-1}\big)$$

Na začátku z matice $\big(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\big)$ získáme matici, v jejíž levé polovině je matice $\boldsymbol{B}$ v Gaussově tvaru.

Zpětný chod: 1. krok: Odečítáním vhodných násobků (celého) spodního řádku od (celých) řádků nad ním získáme nad prvkem vpravo dole v matici $\boldsymbol{B}$ nuly. 2. krok: celý postup zopakujeme s tím, že začneme o řádek výše atd. Po konečném počtu kroků takto získáme matici, která už má v levé polovině diagonální matici, přičemž všechny její diagonální prvky jsou nenulové. Nakonec po vydělení každého řádku příslušným nenulovým diagonálním prvkem získáme žádanou matici $\big(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{A}^{-1}\big)$.

2.5 Řešení maticových rovnic pomocí inverzní matice

Předpokládejme, že $\boldsymbol{B}$ je regulární matice. Při řešení maticových rovnic využijeme:

$$\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}^{-1}.$$

$$\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{A}.$$

Nechť matice $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{E}$ je regulární. Potom

$$\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{X} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{X}\,\boldsymbol{B} - \boldsymbol{X}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{C} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\,(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{E})^{-1}.$$

$$\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{X} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{X} - \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{E})^{-1}\,\boldsymbol{C}.$$