12. Determinanty a jejich použití

(PEF — PaA)

Petr Gurka

aktualizováno 20. prosince 2012

Obsah

1 Determinant

1.1 Definice determinantu

Permutace π množiny $\{1, 2, \dots, n\}$
je prosté zobrazení této množiny na sebe (to znamená, že $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$, přičemž $\mathcal{D}(\pi) = \mathcal{H}(\pi) = \{1, 2, \dots, n\}$ a zobrazení π je prosté).

Permutaci π můžeme zapsat takto:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Inverze v permutaci π
je každá taková dvojice čísel $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, pro kterou platí $i < j$ a zároveň $\pi(i) > \pi(j)$.

Sudá (resp. *lichá*) je permutace, která obsahuje sudý (resp. lichý) počet inverzí.

Symbolem Π_n označíme množinu všech permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Pro $\pi \in \Pi_n$ nechť k_π je *počet všech inverzí* permutace π.

Ke každé čtvercové matici je možné přiřadit jisté *reálné číslo*, které nazveme *determinantem* této matice.

Definice 1. Je-li $\boldsymbol{A}$ matice řádu n, definujeme její *determinant* následujícím způsobem

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in \Pi n} (-1)^{k_\pi} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}.$$

1.2 Výpočet determinantu řádu 1, 2 a 3

1. Pro $n = 1$ je $\det(a) = a$.

2. Pro $n = 2$ máme

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(tj. součin prvků na hlavní diagonále minus součin prvků na vedlejší diagonále).

3. Pro $n = 3$ lze použít tzv. *Sarrusovo pravidlo*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Pozor!!!
Žádné podobné pravidlo neplatí pro $n \geq 4$.

1.3 Algebraický doplněk

Každému prvku čtvercové matice přiřadíme jisté *reálné číslo*, které nazveme *algebraickým doplňkem* tohoto prvku.

Definice 2. Je-li a_{ij}, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, prvek matice $\boldsymbol{A}$, označme $\boldsymbol{M}_{ij}$ submatici (dílčí matici) matice $\boldsymbol{A}$ řádu $n-1$, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vynecháním jejího i-tého řádku a j-tého sloupce. Číslo $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \boldsymbol{M}_{ij}$ se nazývá *algebraický doplněk* prvku a_{ij} v matici $\boldsymbol{A}$.

Příklad 3. Pro matici $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ je $a_{22} = 3$, $\boldsymbol{M}_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, a tedy

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (18 - 20) = -2.$$

1.4 Výpočet determinantu rozvojem podle řádku nebo sloupce

Výpočet rozvojem podle řádku
Nechť $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ potom platí rovnost

$$\det \boldsymbol{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

Výpočet rozvojem podle sloupce
Nechť $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ potom platí rovnost

$$\det \boldsymbol{A} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

1.5 Výpočet determinantu eliminací

Definice 4. Čtvercová matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ se nazývá horní trojúhelníková, jestliže $a_{ij} = 0$ pro všechny indexy $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i > j$, a nazývá se dolní trojúhelníková, jestliže $a_{ij} = 0$ pro všechny indexy $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i < j$.

Věta 5. *Je-li $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ horní trojúhelníková nebo dolní trojúhelníková matice, potom je její determinant roven součinu diagonálních prvků, tj.*

$$\det \boldsymbol{A} = a_{11}\, a_{22}\, \cdots\, a_{nn}.$$

Věta 6. *Nechť $\boldsymbol{B}$ je čtvercová matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ stejného typu*

1. *záměnou dvou řádků, potom $\det \boldsymbol{B} = -\det \boldsymbol{A}$;*
2. *vynásobením jednoho řádku číslem $r \in \mathbb{R}$, potom $\det \boldsymbol{B} = r \det \boldsymbol{A}$;*
3. *přičtením násobku jednoho řádku k jinému, potom $\det \boldsymbol{B} = \det \boldsymbol{A}$.*

2 Výpočet inverzní matice pomocí determinantů

2.1 Vzorec pro inverzní matici

Věta 7. *Čtvercová matice $\boldsymbol{A}$ řádu n je regulární právě když platí $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.*

Věta 8. *Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová regulární matice řádu n. Potom k ní existuje inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ a platí*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \cdot (A_{ij})^{T} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

kde čísla A_{ij} jsou algebraické doplňky k prvkům a_{ij}, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, matice $\boldsymbol{A}$.

2.2 Inverzní matice k matici 2. řádu

Je-li

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

potom

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

3 Cramerovo pravidlo

CRAMEROVO PRAVIDLO. Uvažujme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \ldots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \tag{1}$$

s *regulární* maticí soustavy $\boldsymbol{A}$. Nechť $\boldsymbol{A}_{(j)}$ značí matici, která vznikne z matice soustavy $\boldsymbol{A}$ nahrazením jejího j-tého sloupce, $j \in \{1, \ldots, n\}$, sloupcem $\mathbf{b}$ pravých stran, tj.

$$\boldsymbol{A}_{(j)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Potom pro vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ řešení soustavy (1) platí

$$x_j = \frac{\det \boldsymbol{A}_{(j)}}{\det \boldsymbol{A}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$