

3. LIMITA FUNKCE V BODĚ

CVIČENÍ PEF — PAA (DOPORUČENÉ ÚLOHY)

Základní úlohy. Následující limity vypočítáme využitím spojitosti příslušných elementárních funkcí a pravidel a limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu. K počítání s $\pm\infty$ a s výrazy, jejichž jmenovatele jdou k nule, označme

$$+0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} x, \quad -0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} x.$$

Využijeme znalosti o limitách základních elementárních funkcí v $\pm\infty$ a následující pravidla:

- $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$ a $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$.
- Je-li $c \in \mathbb{R}$, pak $\infty + c = c + \infty = \infty$, $-\infty + c = c - \infty = -\infty$, $c / \pm\infty = 0$.
- Je-li $c > 0$, pak $\infty \cdot c = c \cdot \infty = \infty$, $-\infty \cdot c = c \cdot -\infty = -\infty$, $\frac{c}{-0} = -\infty$, $\frac{c}{+0} = \infty$.
- Je-li $c < 0$, pak $\infty \cdot c = c \cdot \infty = -\infty$, $-\infty \cdot c = c \cdot -\infty = \infty$, $\frac{c}{-0} = \infty$, $\frac{c}{+0} = -\infty$.

$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} & 2) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 3} & 3) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{x - 1} \\ 4) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5}{x - 2} & 5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2}{x - 3} & 6) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x - 2)^2} \\ 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} & 8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin 2x}{1 - \cos 4x} & 9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{\operatorname{arctg} x} \\ 10) \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^x + e^{-x}) & 11) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{2x} \right) & 12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1 - x} \end{array}$$

Při výpočtu následujících limit navíc použijeme vhodné algebraické úpravy.

$$\begin{array}{lll} 13) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x}{(3x - 2)^2} & 14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x}{2x^4 - 7x^2 + 3x} & 15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 6x^2}{2x^3 + x^2} \\ 16) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - 1} \right) & 17) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 1}{x^2 + 1} & 18) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4x} \\ 19) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x} & 20) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} & 21) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^4 - 16} \end{array}$$

Při výpočtu následujících limit použijte větu „o sevření“.

$$\begin{array}{ll} 22) \lim_{x \rightarrow \infty} (3 + \cos x)^x & 23) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{1}{x} \right)^x \\ 24) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} & 25) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2 + \sin x}}{3x + 5} \end{array}$$

Při výpočtu následujících limit použijte větu o limitě složené funkce.

$$26) \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{x^2 + x + 6}{x^3 + 1} \quad 27) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \quad 28) \lim_{x \rightarrow 1} \log \frac{x^2 + 8x - 9}{x^2 - x}$$

Zkouškové úlohy.

$$29) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 11x - 21}{x^2 - 9x + 14} \quad 30) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3+x+x^2} - \sqrt{9-2x+x^2}}{x^2 - 3x + 2}$$

$$31) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+2} + \sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt[3]{x^2+2x}} \quad 32) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x(x+1)} - x)$$

Vypočítejte limity v krajních bodech definičního oboru funkce f .

$$33) f : y = \frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{x} \quad 34) f : y = \frac{\sqrt{4-x}-2}{x}$$

Výsledky.

- | | | |
|--------------------|---------------------|--------------------|
| 1) $\frac{2}{\pi}$ | 2) 5 | 3) $-\infty$ |
| 4) ∞ | 5) neexistuje | 6) ∞ |
| 7) 0 | 8) 1 | 9) ∞ |
| 10) ∞ | 11) $\frac{2}{\pi}$ | 12) neexistuje |
| 13) $\frac{1}{9}$ | 14) $-\frac{5}{3}$ | 15) -6 |
| 16) $\frac{1}{2}$ | 17) 0 | 18) $\frac{2}{3}$ |
| 19) -1 | 20) -1 | 21) $\frac{3}{8}$ |
| 22) ∞ | 23) ∞ | 24) 0 |
| 25) 0 | 26) 1 | |
| 27) 1 | 28) 1 | 29) $\frac{17}{5}$ |
| 30) $\frac{1}{2}$ | 31) 2 | 32) $\frac{1}{2}$ |

$$33) x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow 0^- \Rightarrow y \rightarrow -\infty$$

$$34) x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow \frac{1}{4}, \quad x \rightarrow 4^- \Rightarrow y \rightarrow -\frac{1}{2}$$