

4. DERIVOVÁNÍ PODLE VZORCŮ A PRAVIDEL

CVIČENÍ PEF — PAA (DOPORUČENÉ ÚLOHY)

1. DERIVACE 1. ŘÁDU

V následujících úlohách vypočítejte první derivaci dané funkce podle vzorců a pravidel pro derivování.

Pravidla pro součet, rozdíl a násobení konstantou. Při výpočtu použijte pravidla

$$(f + g)' = f' + g', \quad (f - g)' = f' - g', \quad (c \cdot f)' = c \cdot f'$$

(f, g jsou funkce, c je konstanta). V případě potřeby funkční předpis předem vhodně upravte.

- | | | |
|---|------------------------------------|--|
| 1) $f(x) = -2$ | 2) $f(t) = \sqrt{2}$ | 3) $f(x) = \ln 5$ |
| 4) $f(x) = x^{-7}$ | 5) $f(t) = t^{7/3}$ | 6) $f(z) = -2z + 7$ |
| 7) $f(x) = 4 - x^{-1,2}$ | 8) $f(r) = \pi r^2$ | 9) $f(x) = 2 \cdot \sqrt[4]{x^3}$ |
| 10) $f(t) = \frac{9}{\sqrt{t}}$ | 11) $f(x) = \frac{3}{2x^2}$ | 12) $f(r) = r^2 + 2r + 3$ |
| 13) $f(x) = r^2 \sqrt[3]{x^2}$ | 14) $f(x) = (x + 2t)^2$ | 15) $f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - \frac{1}{2}x^4$ |
| 16) $f(x) = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}$ | 17) $f(x) = \frac{\pi}{x} + \ln 2$ | 18) $f(x) = 5 \sin x + 3 \cos x$ |
| 19) $f(x) = \log 12 + 9^x$ | 20) $f(x) = e^5 + \log_7 x$ | 21) $f(x) = 7e^x + 10 \cdot 2^x$ |

Součinnové a podílové pravidlo. Při výpočtu použijte pravidla

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

V případě potřeby funkční předpis předem vhodně upravte.

- | | | |
|---|--|--|
| 22) $f(x) = x \arcsin x$ | 23) $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}$ | 24) $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ |
| 25) $f(x) = \sin 2x$ | 26) $f(x) = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$ | 27) $f(x) = \frac{(1 + x^2) \operatorname{arctg} x - x}{2}$ |
| 28) $f(x) = (1 - x^2)^3$ | 29) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} - \sqrt[5]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ | 30) $f(x) = \ln x \log x - \ln a \log_a x$ |
| 31) $f(x) = (a + bx^3)^2$ | 32) $f(x) = x \cos x$ | 33) $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 3x\right)(\sqrt{x} - 6x^4)$ |
| 34) $f(x) = 4\sqrt{x} \arcsin x$ | 35) $f(x) = e^x \ln x$ | 36) $f(x) = \left(1 - \frac{4}{\sqrt[4]{x^2}}\right)(x - 2x^3)$ |
| 37) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln x}$ | 38) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x}$ | 39) $f(x) = \frac{\operatorname{arccotg} x}{\arccos x}$ |
| 40) $f(x) = \frac{\ln x \sin x}{\operatorname{cotg} x}$ | 41) $f(x) = \frac{\operatorname{arccos} x}{x \operatorname{tg} x}$ | 42) $f(x) = (\ln x + \log x) \frac{\operatorname{arccotg} x}{e^x}$ |

Derivace složené funkce. Při výpočtu použijte pravidlo

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

- | | | |
|--|--|--|
| 43) $f(x) = \sin 3x$ | 44) $f(x) = (5x^4 + 6)^7$ | 45) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 6}$ |
| 46) $f(x) = \cos(x^2 - 2x + 5)$ | 47) $f(x) = \operatorname{tg}(\sqrt{x} - 2)$ | 48) $f(x) = \operatorname{cotg}\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$ |
| 49) $f(x) = \sin^2 x$ | 50) $f(x) = \cos^3 x$ | 51) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$ |
| 52) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{cotg} x}}$ | 53) $f(x) = \sin(\cos 3x)$ | 54) $f(x) = \cos x^2$ |
| 55) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(4x - 6)}$ | 56) $f(x) = \operatorname{cotg} \sqrt{x^2 + 3x - 2}$ | 57) $f(x) = \log \frac{2x - \sin x}{x^2 + 1}$ |
| 58) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1 - x^3}}{3 \sin 2x}$ | 59) $f(x) = \sqrt[3]{a + bx^3}$ | 60) $f(x) = \sqrt{\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} x}}$ |

Výsledky.

- | | | |
|--|---|--|
| 1) 0 | 2) 0 | 3) 0 |
| 4) $-\frac{7}{x^8}$ | 5) $\frac{7}{3}x^{4/3}$ | 6) -2 |
| 7) $1, 2 \cdot x^{-2,2}$ | 8) $2\pi r$ | 9) $\frac{3}{2 \cdot \sqrt[4]{x}}$ |
| 10) $-\frac{9}{2 \cdot \sqrt{t^3}}$ | 11) $-\frac{3}{x^3}$ | 12) $2r + 2$ |
| 13) $\frac{2r^2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$ | 14) $2x + 4t$ | 15) $-\frac{1}{3} + 2x - 2x^3$ |
| 16) $\frac{4b}{3x^2 \sqrt[3]{x}} - \frac{2a}{3x \sqrt[3]{x^2}}$ | 17) $-\frac{\pi}{x^2}$ | 18) $5 \cos x - 3 \sin x$ |
| 19) $9^x \ln 9$ | 20) $\frac{1}{x \ln 7}$ | 21) $7e^x + 10 \cdot 2^x \ln 2$ |
| 22) $\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ | 23) $\frac{-2x^2 - 6x + 25}{(x^2 - 5x + 5)^2}$ | 24) $\frac{1}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^2}$ |
| 25) $2 \cos 2x$ | 26) $\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x^2} - \frac{2}{x^2}$ | 27) $x \operatorname{arctg} x$ |
| 28) $-6x(x^2 - 1)^2$ | 29) $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}} - \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$ | 30) $\frac{2 \ln x}{x \ln 10} - \frac{1}{x}$ |
| 31) $6bx^2(a + bx^3)$ | 32) $\cos x - x \sin x$ | 33) $\frac{9\sqrt{x} - 180x^4 - 42x^2\sqrt{x}}{2}$ |
| 34) $\frac{2 \arcsin x}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$ | 35) $e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$ | 36) $\frac{20x^2 - 6x^2\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$ |
| 37) $\frac{x \ln x - (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x}{x(x^2 + 1) \ln^2 x}$ | 38) $\frac{\sin x \cos x - (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x}{(x^2 + 1) \sin^2 x}$ | |
| 39) $\frac{(1+x^2) \operatorname{arccotg} x - \sqrt{1-x^2} \arccos x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2} \arccos^2 x}$ | 40) $\frac{x \ln x \sin x + \cos x \sin^2 x + x \ln x \cos^2 x \sin x}{x \cos^2 x}$ | |
| 41) $\frac{-x \sin x \cos x - \arccos x (\sin x \cos x + x) \sqrt{1-x^2}}{x^2 \sin^2 x \sqrt{1-x^2}}$ | | |
| 42) $\frac{(1 + \ln 10) \operatorname{arccotg} x}{xe^x \ln 10} - (\ln x + \log x) \frac{1 + (1+x^2) \operatorname{arccotg} x}{(1+x^2)e^x}$ | | |

- | | |
|---|---|
| 43) $3 \cos 3x$ | 44) $140x^3(5x^4 + 6)^6$ |
| 45) $\frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 6}}$ | 46) $2(1 - x) \sin(x^2 - 2x + 5)$ |
| 47) $\frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2(\sqrt{x} - 2)}$ | 48) $\frac{-4}{(x - 2)^2 \sin^2\left(\frac{x+2}{2-x}\right)}$ |
| 49) $\sin 2x$ | 50) $-3 \cos^2 x \sin x$ |
| 51) $\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x} \cos^2 x}$ | 52) $\frac{1}{3 \cos x \sin x \sqrt[3]{\operatorname{cotg} x}}$ |
| 53) $-3 \cos(\cos 3x) \sin 3x$ | 54) $-2x \sin x^2$ |
| 55) $\frac{-8 \cos(4x - 6)}{\sin^3(4x - 6)}$ | 56) $\frac{-(2x + 3)}{2\sqrt{x^2 + 3x - 2} \sin^2 \sqrt{x^2 + 3x - 2}}$ |
| 57) $\frac{2 - 2x^2 - (x^2 + 1) \cos x + 2x \sin x}{(x^2 + 1)(2x - \sin x) \ln 10}$ | 58) $-\frac{x^2 \sin 2x + 2(1 - x^3) \cos 2x}{3\sqrt[3]{(1 - x^3)^2} \sin^2 2x}$ |
| 59) $\frac{bx^2}{\sqrt[3]{(a + bx^3)^2}}$ | 60) $\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x}} \frac{3 \cos 3x \sin x \cos x - \sin 3x}{2 \sin^2 x}$ |

2. DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ, DERIVACE V BODĚ

V následujících úlohách vypočítejte druhou derivaci dané funkce podle vzorců a pravidel pro derivování.

- 1) $f(x) = \operatorname{tg} x$ 2) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ 3) $f(x) = \frac{2x + 3}{5x - 1}$
 4) $f(x) = \frac{3 + e^{2x}}{5 - e^{2x}}$ 5) $f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$ 6) $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1})$

V následujících úlohách vypočítejte požadovanou derivaci v daném bodě

- 7) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$, $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = ?$ 8) $f(x) = \arcsin \frac{1 - x}{1 + x}$, $f'(4) = ?$
 9) $f(x) = \ln \frac{e^x}{x^2 + 1}$, $f''(2) = ?$

Výsledky.

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$ | 2) $\frac{-2x}{(1 + x^2)^2}$ | 3) $\frac{170}{(5x - 1)^2}$ |
| 4) $\frac{32e^{2x}(5 + e^{2x})}{(5 - e^{2x})^2}$ | 5) $\frac{2(3 + \ln x)}{x^2(1 + \ln x)^3}$ | 6) $\frac{e^x}{(e^{2x} + 1)\sqrt{e^{2x} + 1}}$ |
| 7) 2 | 8) $-\frac{1}{10}$ | 9) $\frac{6}{25}$ |