

**5. DERIVOVÁNÍ PODLE VZORCŮ A PRAVIDEL,
TEČNA A NORMÁLA KE GRAFU FUNKCE
CVIČENÍ PEF — PAA (DOPORUČENÉ ÚLOHY)**

1. DERIVOVÁNÍ

Vypočítejte derivaci $f'(x)$ (v obecném bodě x) funkce zadané předpisem $y = f(x)$ pomocí vzorců a pravidel pro derivování. Určete, ve kterých bodech x tato rovnost platí.

Zkouškové úlohy.

$$\begin{array}{lll}
 1) y = \sqrt{x^4 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{x^4 - 1} & 2) y = -\frac{\arcsin x}{x} + \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} & 3) y = \ln \sqrt{\frac{2 + \sin^2 5x}{2 - \sin^2 5x}} \\
 4) y = 2\sqrt{1 - x} + \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x}}{1 + \sqrt{1 - x}} & 5) y = \ln \sqrt{\frac{2 + x}{2 - x}} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} & 6) y = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} \\
 7) y = 2 \operatorname{arctg} x - \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} & 8) y = \ln(2 \sin 3x + \sqrt{5 + 4 \sin^2 3x}) & 9) y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}
 \end{array}$$

Obtížnější úlohy.

$$\begin{array}{lll}
 10) y = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{x^2 + 1} & 11) y = \log_2 (\log_3 (\ln(x^2 + 1))) & 12) y = (\sin x)^{x^2 \cos x} \\
 13) y = x \arcsin \frac{1}{x} + \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) & 14) y = \frac{1}{4} \ln \frac{1 + x}{1 - x} - \frac{\operatorname{arctg} x}{2} & 15) y = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} \\
 16) y = 2 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x + 1} + \ln \frac{\sqrt[4]{x + 1} - 1}{\sqrt[4]{x + 1} + 1} & 17) y = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} & 18) y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2} - x}, a \neq 0
 \end{array}$$

Výsledky.

$$\begin{array}{ll}
 1) \frac{2\sqrt{x^4 - 1}}{x}, x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) & 2) \frac{\arcsin x}{x^2}, x \in (0, 1) \\
 3) \frac{10 \sin 10x}{4 - \sin^4 5x}, x \in \mathbb{R} & 4) \frac{\sqrt{1 - x}}{x}, x \in (0, 1) \\
 5) \frac{2x^2}{16 - x^4}, x \in (-2, 2) & 6) -2 \frac{\cos x}{\sin^3 x}, x \neq k\pi \\
 7) \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}, x \neq 0 & 8) \frac{6 \cos 3x}{\sqrt{5 + 4 \sin^2 3x}}, x \in \mathbb{R} \\
 9) \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1) & 10) \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}, x \neq 0 \\
 11) \frac{2x}{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot (x^2 + 1) \log_3 (\ln(x^2 + 1)) \ln(x^2 + 1)}, x \in (-\infty, -\sqrt{e - 1}) \cup (\sqrt{e - 1}, \infty) \\
 12) (\sin x)^{x^2 \cos x} (x \ln(\sin x) (2 \cos x - x \sin x) + x^2 \cos x \cdot \operatorname{cotg} x), x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k + 1)\pi) \\
 13) \arcsin \frac{1}{x}, x \in (1, \infty) & 14) \frac{x^2}{1 - x^4}, x \in (-1, 1) & 15) \frac{1}{\sin^3 x}, x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k + 1)\pi) \\
 16) \frac{1}{x \sqrt[4]{x + 1}}, x \in (1, \infty) & 17) \frac{1}{5 + 4 \sin x}, x \neq (2k + 1)\pi & 18) \frac{2}{\sqrt{x^2 + a^2}}, x \in \mathbb{R}
 \end{array}$$

2. TEČNA A NORMÁLA KE GRAFU FUNKCE

Základní úlohy. 1) Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f : y = x^2 - 3x + 1$ v bodě grafu $T = [2, y_T]$.

2) Určete rovnici normály ke grafu funkce $f : y = \frac{x+1}{x+3}$ v bodě grafu $T = [-2, y_T]$.

3) Stanovte rovnici tečny ke křivce $y = x^2 - 1$ rovnoběžné s přímkou $p : 2x - y + 3 = 0$.

Zkouškové úlohy. 4) Určete rovnici tečny a rovnici normály ke grafu funkce $f : y = x e^{-2x}$ v bodě grafu $T = [\frac{1}{2}, y_T]$.

5) Určete rovnici tečny a rovnici normály ke grafu funkce $f : y = \operatorname{arccotg} \frac{1+x}{1-x}$ v bodě grafu $T = [0, y_T]$.

6) Stanovte rovnici normály ke křivce $y = x^2$ rovnoběžné s přímkou $p : 2x - 6y + 5 = 0$.

7) Stanovte rovnici tečny ke křivce $y = -3x^2 + 11x - 3$ rovnoběžné s přímkou $p : 4x + 4y + 5 = 0$.

Obtížnější úlohy. 8) Stanovte rovnici tečny ke křivce $y = x^2$ kolmé na přímkou $p : 2x - 6y + 12 = 0$.

9) Ve kterém bodě je tečna ke křivce $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$ rovnoběžná s osou x ?

10) Stanovte rovnici normály ke křivce $y = \ln \frac{e^{x+1}}{x^2+1}$ rovnoběžné s přímkou $p : 2x + 4y + 5 = 0$.

Výsledky.

1) $t : y = x - 3$

2) $n : y = -\frac{1}{2}x - 2$

3) $t : y = 2x - 2$

4) $t : y = \frac{1}{2e}, \quad n : x = \frac{1}{2}$

5) $t : y = -x + \frac{\pi}{4}, \quad n : y = x + \frac{\pi}{4}$

6) $n : y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{4}$

7) $t : y = -x + 9$

8) $t : y = -3x - \frac{9}{4}$

9) $A = [2, 1]$

10) $n : x + 2y + 1 + \ln 4 = 0$