

6. VÝPOČET LIMIT (VČETNĚ L'HOSPITALOVA PRAVIDLA).

ASYMPTOTY GRAFU FUNKCE.

CVIČENÍ PEF — PAA (DOPORUČENÉ ÚLOHY)

1. VÝPOČET LIMIT

Základní úlohy. Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočítejte následující limity. Současně ověřte, že pravidlo je možné použít.

Limity typu „0/0“ a „něco/∞“.

$$\begin{array}{lll}
 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} & 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} & 3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x} \\
 4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) & 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x} & 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x} \\
 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0) & 8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} & 9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{2x}}
 \end{array}$$

Limity typu „0 · ∞“.

$$\begin{array}{ll}
 10) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos 3x \operatorname{tg} 5x & 11) \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x} \\
 12) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{cotg}^2 x & 13) \lim_{x \rightarrow \infty} x (e^{1/x} - 1)
 \end{array}$$

Limity typu „1[∞]“ nebo „0⁰“. (Použijte vztah $A^B = e^{B \ln A}$, $A > 0$, a Větu o limitě složené funkce.)

$$\begin{array}{lll}
 14) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} & 15) \lim_{x \rightarrow \infty} (\operatorname{arccotg} x)^{\frac{1}{x}} & 16) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \\
 17) \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} & 18) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{\frac{-2}{\ln(x-1)}} & 19) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{1/\ln x}
 \end{array}$$

Zkouškové úlohy. Vypočítejte následující limity (ne nutně l'Hospitalovým pravidlem).

$$\begin{array}{lll}
 20) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\operatorname{arccotg} x} & 21) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x}{\sin x} & 22) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \\
 23) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} & 24) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \quad (b \neq 0) & 25) \lim_{x \rightarrow a} \arcsin(x - a) \cdot \operatorname{cotg}(x - a) \\
 26) \lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \frac{2 - 6 \operatorname{cotg}^2 x}{\cos 7x + \frac{1}{2}} & 27) \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\sin 5x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{4 - 4 \operatorname{tg}^2 x} & 28) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x e^{2x-4} - 5x + 8}{x^2 - 4x + 4}
 \end{array}$$

Výsledky.

$$\begin{array}{lllll}
 1) 2 & 2) \frac{1}{3} & 3) 1 & 4) \frac{1}{2} & 5) 0 \\
 6) 2 & 7) 0 & 8) \infty & 9) 0 & 10) -\frac{3}{5} \\
 11) 0 & 12) \frac{1}{2} & 13) 1 & 14) \frac{1}{e} & 15) 1 \\
 16) 1 & 17) 1 & 18) e^2 & 19) e & 20) \infty \\
 21) \text{neexistuje} & 22) 1 & 23) 0 & 24) a/b & 25) 1 \\
 26) \frac{32}{21} & 27) \frac{5\sqrt{2}}{32} & 28) 6 & &
 \end{array}$$

2. ASYMPTOTY GRAFU FUNKCE

Určete rovnice všech asymptot grafu dané funkce $f : y = f(x)$.

Základní úlohy.

$$1) \quad y = 5x - 6 \qquad 2) \quad y = x + \frac{1}{x}$$

$$3) \quad y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} + 2x \qquad 4) \quad y = 3x - 1 - \frac{\sin x}{x - 3}$$

Zkouškové úlohy.

$$5) \quad y = x - \operatorname{arccotg}(x + 2) + \frac{3}{x + 1} \qquad 6) \quad y = \frac{2x^2 - 7x + 7}{x - 2}$$

$$7) \quad y = \frac{x^2 + \ln x}{x} \qquad 8) \quad y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$$

$$9) \quad y = \frac{\ln x}{x} + x + 2 \qquad 10) \quad y = \frac{\cos x - 1}{x^2} + x \operatorname{arccotg} x$$

Výsledky. 1) $y = 5x - 6$

2) $x = 0, y = x$

3) $y = 2x$

4) $x = 3, y = 3x - 1$

5) $x = -1, y = x, y = x - \pi$

6) $x = 2, y = 2x - 3$

7) $x = 0, y = x$

8) $x = -\frac{1}{e}, y = x + \frac{1}{e}$

9) $x = 0, y = x + 2$

10) $y = 1, y = \pi x + 1$