8. EXTRÉMY, PRŮBĚH FUNKCE, INTEGROVÁNÍ PŘÍMOU METODOU

CVIČENÍ PEF — PAA (DOPORUČENÉ ÚLOHY)

1. Lokální a globální extrémy, průběh funkce

Základní úlohy. U dané funkce $f : y = f(x)$ nalezněte lokální extrémy.

1) $y = 3x^2 - 18x + 29$ 2) $y = x - \dfrac{2x+1}{3x-5}$

3) $y = \dfrac{1 + \ln x}{x}$ 4) $y = \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$

Zkouškové úlohy. U dané funkce $f : y = f(x)$ vyhledejte na příslušném intervalu všechny její extrémy (tj. lokální i globální). Rozlište, zda se jedná o maximum či minimum a zda je daný extrém ostrý či neostrý. Není-li interval uveden, pak vyhledejte extrémy na definičním oboru dané funkce.

5) $y = -2 \cdot 10^{2-6x-x^2} + \log 2,\ x \in \langle -4, 0\rangle$ 6) $y = \sqrt{2x - x^2}$

7) $y = \arcsin\sqrt{2-x}$ 8) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2}$

9) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x,\ x \in \langle -3, 3\rangle$ 10) $y = -x\ln x + 2x,\ x \in \langle 1, e^2\rangle$

Obtížnější úlohy. 11) Vyšetřete průběh funkce $f : y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$.

Výsledky. 1) ostré lokální minimum $f(3) = 2$

2) nemá lokální extrémy

3) ostré lokální maximum $f(1) = 1$, lokální minimum nemá

4) ostré lokální maximum $f(1) = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$, lokální minimum nemá

5) ostré globální maximum $f(0) = \log 2 - 200$, ostré globální i lokální minimum $f(-3) = \log 2 - 2 \cdot 10^{11}$, lokální maxima nemá

6) ostré globální i lokální maximum $f(1) = 1$, neostrá globální minima $f(0) = f(2) = 0$, lokální minima nemá

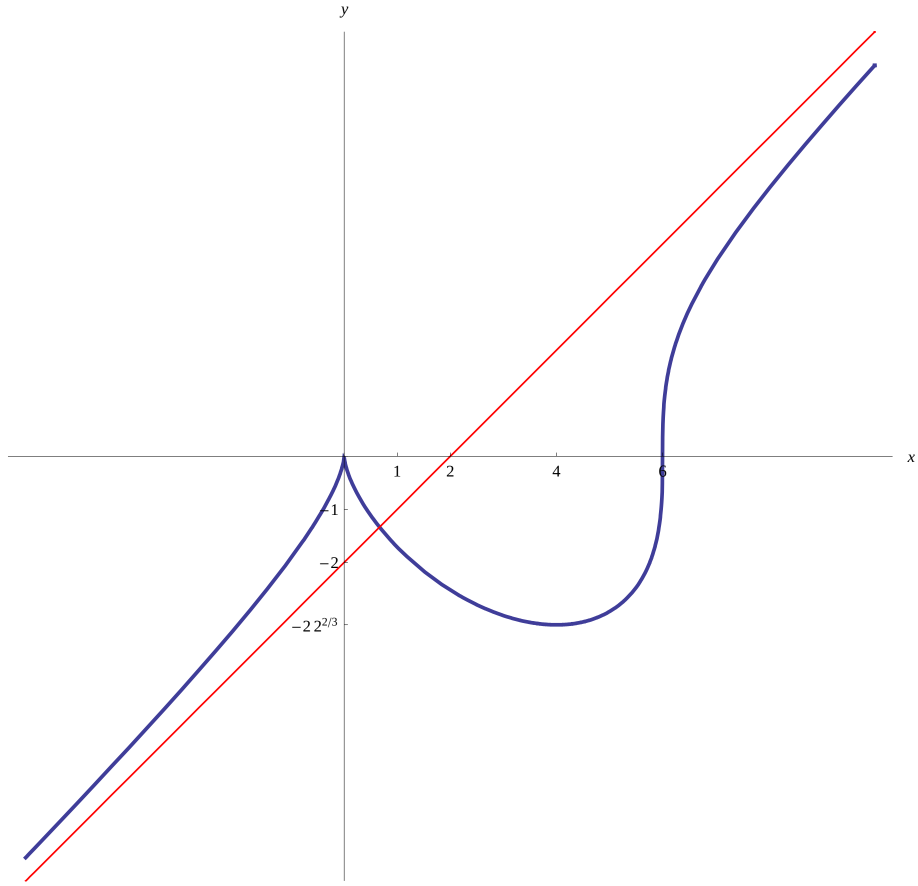
7) ostré globální maximum $f(1) = \frac{\pi}{2}$, ostré globální minimum $f(2) = 0$, lokální extrémy nemá

8) ostré globální i lokální maximum $f(0) = \frac{\pi}{4}$, neostrá globální minima $f(-1) = f(1) = 0$, lokální minima nemá

9) ostré globální i ostré lokální minimum $f(1) = -\frac{7}{6}$, ostré lokální maximum $f(-2) = \frac{10}{3}$, ostré globální maximum $f(3) = \frac{15}{2}$

10) ostré globální i ostré lokální maximum $f(e) = e$, ostré globální minimum $f(e^2) = 0$

11) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, asymptota $y = x - 2$, roste na $(-\infty, 0\rangle$, $\langle 4, \infty)$, klesá na $\langle 0, 4\rangle$, konkávní na $\langle 6, \infty)$, konvexní na $(-\infty, 0\rangle$, $\langle 0, 6\rangle$, průsečík s osami $[0, 0]$, v němž je lokální maximum, lokální minimum $[4, -2\sqrt[3]{4}]$, inflexní bod $[6, 0]$



k př. 15)

2. Výpočet neurčitého integrálu přímou metodou

Základní úlohy. (Při přímé metodě výpočtu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ postupujeme tak, že integrovanou funkci $f(x)$ proměnné x upravíme na součet funkcí tvaru (konstanta) krát $g(x)$, kde $g(x)$ je funkce, jejíž integrál nalezneme v tabulce.)

1) $\displaystyle\int \left(2x^3 - \frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$ 2) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x$ 3) $\displaystyle\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{6x}\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int 10^x e^x\,\mathrm{d}x$ 5) $\displaystyle\int \frac{(2^x - 3^x)^2}{6^x}\,\mathrm{d}x$ 6) $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^2 t\,\mathrm{d}t$

7) $\displaystyle\int \frac{5\operatorname{tg}^2 y - 1}{\sin^2 y}\,\mathrm{d}y$ 8) $\displaystyle\int \left(\sin\tfrac{x}{2} - \cos\tfrac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$ 9) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\pi x} + a^{\pi x}\right) \mathrm{d}x\ (a > 0, a \neq 1)$

10) $\displaystyle\int \frac{\log x}{\sqrt{1-a^2}}\,\mathrm{d}a$ 11) $\displaystyle\int \frac{(1-\sqrt{y})^2}{x}\,\mathrm{d}y$ 12) $\displaystyle\int \sqrt{2x}\cdot\sqrt{\frac{13}{x-x^3}}\,\mathrm{d}x$

13) $\displaystyle\int (a+bx^3)^2\,\mathrm{d}x$ 14) $\displaystyle\int \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 \mathrm{d}x$ 15) $\displaystyle\int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad (m, n \in \mathbb{N})$

16) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2}}{\sin^2 x\,\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ 17) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}}\,\mathrm{d}x$ 18) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\pi x} + a^{\pi x}\right) \mathrm{d}a\ (x \neq 0, x \neq -\tfrac{1}{\pi})$

19) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$ 20) $\displaystyle\int \frac{\cos 2y}{\cos^2 y}\,\mathrm{d}y$ 21) $\displaystyle\int \frac{2x^5 - x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 2}{x^3 - 2x - 2}\,\mathrm{d}x$

Výsledky.

1) $\dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^2}{4} + \ln|x| + C$

2) $4\sqrt[4]{x} + 2\sqrt{x} + C$

3) $\frac{1}{6}\ln|x| + \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{6}x + C$

4) $\dfrac{(10\,e)^x}{1+\ln 10} + C$

5) $\dfrac{(\frac{2}{3})^x - (\frac{3}{2})^x}{\ln 2 - \ln 3} - 2x + C$

6) $-\operatorname{cotg} t - t + C$

7) $5\operatorname{tg} y + \operatorname{cotg} y + C$

8) $x + \cos x + C$

9) $\frac{1}{\pi}\ln|x| + \frac{1}{\pi\,\ln a}\,a^{\pi x} + C$

10) $\log x \cdot \arcsin a + C$

11) $\dfrac{1}{x}\big(y - \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}y^2\big) + C$

12) $\sqrt{26}\,\arcsin x + C$

13) $a^2x + \dfrac{abx^4}{2} + \dfrac{b^2x^7}{7} + C$

14) $a^2x - \frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}} - \dfrac{x^3}{3} + C$

15) $\dfrac{2x^{2m}\sqrt{x}}{4m+1} - \dfrac{4x^{m+n}\sqrt{x}}{2m+2n+1} + \dfrac{2x^{2n}\sqrt{x}}{4n+1} + C$

16) $\sqrt{2}(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x) + C$

17) $-\dfrac{1}{2e^{2x}} + C$

18) $a\Big(\dfrac{1}{\pi x} + \dfrac{a^{\pi x}}{\pi x + 1}\Big) + C$

19) $\operatorname{tg} x - x + C$

20) $2y - \operatorname{tg} y + C$

21) $\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$