

9. VÝPOČET NEURČITÝCH INTEGRÁLŮ RŮZNÝMI METODAMI

CVIČENÍ PEF — PAA (DOPORUČENÉ ÚLOHY)

1. NEURČITÉ INTEGRÁLY RŮZNÝCH TYPŮ

Substituční metoda. V následujících úlohách je vhodné volit substituci za argument goniometrické funkce.

$$1) \int \frac{dx}{\sin^2 3x} \quad 2) \int \cos \frac{2x-3}{5} dx \quad 3) \int x^3 \sin x^4 dx$$

V následujících úlohách je vhodné volit substituci za jmenovatel zlomku.

$$4) \int \frac{dx}{1-x} \quad 5) \int \frac{e^x dx}{2+e^x} \quad 6) \int \frac{x^3 dx}{x^2-1}$$

V následujících úlohách je vhodné volit substituci za základ mocniny mnohočlenu.

$$7) \int \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}} \quad 8) \int \frac{x^2 dx}{(1-x^3)^2} \quad 9) \int \frac{x^3 dx}{(2+3x^2)^3}$$

V následujících úlohách je vhodné volit substituci za odmocninu (případně za základ odmocniny).

$$10) \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x}} \quad 11) \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x-1}} \quad 12) \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}$$

V následujících úlohách je vhodné volit substituci za exponent.

$$13) \int e^{-x} dx \quad 14) \int x^4 e^{4x^5+7} dx \quad 15) \int \frac{10^{\operatorname{cotg} x}}{\sin^2 x} dx$$

V následujících úlohách je vhodné volit substituci za logaritmickou funkci.

$$16) \int \frac{dx}{x \ln^7 x} \quad 17) \int \frac{\ln(x+1) dx}{x+1} \quad 18) \int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$$

V následujících úlohách je vhodné volit substituci za vhodnou goniometrickou funkci.

$$19) \int \frac{\operatorname{tg}^7 x dx}{\cos^2 x} \quad 20) \int \frac{\cos x dx}{\sin^5 x} \quad 21) \int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}$$

V následujících úlohách je vhodné substitucí převést daný integrál na integrál $\int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C$.

$$22) \int \frac{dx}{16+25x^2} \quad 23) \int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} \quad 24) \int \frac{x dx}{4+x^4}$$

V následujících úlohách je vhodné substitucí převést daný integrál na integrál $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arcsin} t + C$.

$$25) \int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} \quad 26) \int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}} \quad 27) \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

Metoda per partes. Úlohy na přímé použití metody per partes.

$$\begin{array}{lll} 28) \int x^2 \sin x \, dx & 29) \int \frac{\ln x \, dx}{\sqrt{x}} & 30) \int \frac{x^2 \, dx}{e^x} \\ 31) \int x 3^x \, dx & 32) \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} \, dx & 33) \int \ln^2 x \, dx \\ 34) \int x \ln^2 x \, dx & 35) \int x^2 \arccos x \, dx & 36) \int \sqrt{x} \ln^2 x \, dx \end{array}$$

Integrály, které po použití metody per partes vedou na rovnici.

$$\begin{array}{lll} 37) \int e^x \sin x \, dx & 38) \int \sin^2 x \, dx & 39) \int \frac{\ln x \, dx}{x} \\ 40) \int e^{3x} \sin 2x \, dx & 41) \int e^{-x} \cos^2 x \, dx & 42) \int 3^x \cos x \, dx \end{array}$$

Integrály různých typů.

$$\begin{array}{lll} 43) \int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \, dx & 44) \int \sin x \sqrt{2 + \cos x} \, dx & 45) \int \arccos x \, dx \\ 46) \int \frac{\cos^3 x \, dx}{1 - \sin x} & 47) \int x \operatorname{arctg}^2 x \, dx & 48) \int \frac{(6x - 7)}{3x^2 - 7x + 11} \, dx \end{array}$$

Zkouškové úlohy.

$$\begin{array}{lll} 49) \int \frac{\arcsin^3 x - 3x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx & 50) \int x^3 \left(\ln 2x + \frac{e^{2x^2+3}}{x^2} \right) \, dx & 51) \int (3x + 6) \left(e^x + \frac{\cos x}{(x + 2)\sqrt{4 + \sin x}} \right) \, dx \\ 52) \int \cos \sqrt{4x - 3} \, dx & 53) \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} \, dx & 54) \int \ln(1 + \sqrt{x}) \, dx \\ 55) \int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} \, dx & 56) \int \frac{3 \, dx}{x(25 + 64 \ln^2 x)} & 57) \int \frac{e^x \, dx}{\sqrt{64 - 49 e^{2x}}} \end{array}$$

Obtížnější úlohy.

$$\begin{array}{lll} 58) \int \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) \, dx & 59) \int \frac{3x^2 - 1}{2x\sqrt{x}} \operatorname{arctg} x \, dx & 60) \int \sin \ln x \, dx \\ 61) \int \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^3} \, dx & 62) \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(x^2 - 1)^2} \, dx & 63) \int \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2} \, dx \end{array}$$

Výsledky.

$$\begin{array}{ll} 1) -\frac{\cotg 3x}{3} + C & 2) \frac{5}{2} \sin \frac{2x-3}{5} + C \\ 3) -\frac{\cos x^4}{4} + C & 4) -\ln|1-x| + C \\ 5) \ln(2 + e^x) + C & 6) \frac{x^2 - 1}{2} + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + C \\ 7) \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1}} + C & 8) \frac{1}{3(1 - x^3)} + C \\ 9) \frac{-(3x^2 + 1)}{18(2 + 3x^2)^2} + C & 10) -\frac{2}{3}(2 + x)\sqrt{1 - x} + C \\ 11) \frac{2}{3}(e^x + 2)\sqrt{e^x - 1} + C & 12) 2\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} + C \end{array}$$

- 13) $-e^{-x} + C$
- 14) $\frac{e^{4x^5+7}}{20} + C$
- 15) $\frac{-10^{\cotg x}}{\ln 10} + C$
- 16) $\frac{-1}{6 \ln^6 x} + C$
- 17) $\frac{\ln^2(x+1)}{2} + C$
- 18) $\operatorname{arctg}(\ln x) + C$
- 19) $\frac{\operatorname{tg}^8 x}{8} + C$
- 20) $\frac{-1}{4 \sin^4 x} + C$
- 21) $\frac{1}{2 \cos^2 x} + C$
- 22) $\frac{1}{20} \operatorname{arctg} \frac{5x}{4} + C$
- 23) $\operatorname{arctg} e^x + C$
- 24) $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + C$
- 25) $\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{4} + C$
- 26) $\frac{\sqrt{5}}{5} \arcsin \left(x \sqrt{\frac{5}{3}}\right) + C$
- 27) $\frac{1}{2} \arcsin x^2 + C$
- 28) $2x \sin x + (2 - x^2) \cos x + C$
- 29) $2\sqrt{x} (\ln x - 2) + C$
- 30) $-(x^2 + 2x + 2) e^{-x} + C$
- 31) $\frac{3^x}{\ln^2 3} (x \ln 3 - 1) + C$
- 32) $-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sin^2 x} + \cotg x \right) + C$
- 33) $x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C$
- 34) $\frac{x^2}{4} (2 \ln^2 x - 2 \ln x + 1) + C$
- 35) $\frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{1}{9} (x^2 + 2) \sqrt{1 - x^2} + C$
- 36) $\frac{2}{3} x \sqrt{x} (\ln^2 x - \frac{4}{3} \ln x + \frac{8}{9}) + C$
- 37) $\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$
- 38) $\frac{1}{4} (2x - \sin 2x) + C$
- 39) $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$
- 40) $\frac{e^{3x}}{13} (3 \sin 2x - 2 \cos 2x) + C$
- 41) $\frac{1}{10 e^x} (2 \sin 2x - \cos 2x - 5) + C$
- 42) $3^x \frac{\sin x + (\ln 3) \cos x}{1 + \ln^2 3} + C$
- 43) $x - 2\sqrt{x} + 2 \ln(1 + \sqrt{x}) + C$
- 44) $-\frac{2}{3} \sqrt{(2 + \cos x)^3} + C$
- 45) $x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C$
- 46) $\sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + C$
- 47) $\frac{(x^2 + 1) \operatorname{arctg}^2 x}{2} - x \operatorname{arctg} x + \ln \sqrt{x^2 + 1} + C$
- 48) $\ln(3x^2 - 7x + 11) + C$
- 49) $\frac{1}{4} \arcsin^4 x + 3 \sqrt{1 - x^2} + C$
- 50) $\frac{x^4}{16} (4 \ln 2x - 1) + \frac{1}{4} e^{2x^2+3} + C$
- 51) $3e^x (x + 1) + 6 \sqrt{4 + \sin x} + C$
- 52) $\frac{1}{2} (\sqrt{4x - 3} \sin \sqrt{4x - 3} + \cos \sqrt{4x - 3}) + C$
- 53) $\sqrt{2x} \operatorname{arctg} \sqrt{2x} - \frac{1}{2} \ln(2x + 1) + C$
- 54) $(x - 1) \ln(1 + \sqrt{x}) - \frac{1}{2} x + \sqrt{x} + C$
- 55) $\operatorname{tg} x (\ln \cos x + 1) - x + C$
- 56) $\frac{3}{40} \operatorname{arctg}(\frac{8}{5} \ln x) + C$
- 57) $\frac{1}{7} \arcsin(\frac{7}{8} e^x) + C$
- 58) $x \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arcsin x + C$
- 59) $\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} x - 2\sqrt{x} + C$
- 60) $\frac{x}{2} (\sin \ln x - \cos \ln x) + C$
- 61) $\ln |x| - \frac{(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1)}{2x^2} + C$
- 62) $\frac{1}{8} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{\operatorname{arctg} x}{2(x^2 - 1)} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + C$
- 63) $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{\ln x}{2(1+x^2)} + C$