

**10. VÝPOČET URČITÉHO INTEGRÁLU,
OBSAH PLOCHY ROVINNÉHO ÚVARU
CVIČENÍ PEF — PAA (DOPORUČENÉ ÚLOHY)**

1. URČITÝ INTEGRÁL

Základní úlohy (procvičení různých metod).

Přímá metoda.

$$1) \int_1^2 \frac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}} dx \quad 2) \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} \quad 3) \int_0^1 \frac{e^{2x} + e^x}{e^x} dx$$

Metoda per partes. Úlohy na přímé použití metody per partes.

$$4) \int_0^\pi x \sin x dx \quad 5) \int_1^3 \ln x dx \quad 6) \int_0^1 x^2 e^x dx$$

Integrály, které po použití metody per partes vedou na rovnici.

$$7) \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx \quad 8) \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \quad 9) \int_0^\pi \sin^2 x dx$$

Substituční metoda.

$$10) \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx \quad 11) \int_0^4 x \sqrt{x^2 + 9} dx \quad 12) \int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$$

Zkouškové úlohy.

$$13) \int_0^{1/2} \arcsin x dx \quad 14) \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \quad 15) \int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx$$

$$16) \int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx \quad 17) \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}} \quad 18) \int_0^{\pi/4} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg} x} dx$$

$$19) \int_0^1 x^3 e^x dx \quad 20) \int_0^1 x 3^x dx \quad 21) \int_0^{\pi/4} x \sin 2x dx$$

Výsledky.

$$1) \frac{12}{17}(2^{1/2} - 1) \quad 2) 4\sqrt[3]{3} \quad 3) e$$

$$4) \pi \quad 5) 3 \ln 3 - 2 \quad 6) e - 2$$

$$7) \frac{1}{2}(e^{\pi/2} + 1) \quad 8) \frac{1}{2} \quad 9) \frac{\pi}{2}$$

$$10) \frac{1}{2} \ln 2 \quad 11) \frac{98}{3} \quad 12) \sin 1$$

$$13) \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \quad 14) 1 - \frac{\pi}{4} \quad 15) 2(e^2 + 1)$$

$$16) 2 \quad 17) \frac{\pi\sqrt{3}}{9} \quad 18) \ln 2$$

$$19) 6 - 2e \quad 20) \frac{3 \ln 3 - 2}{\ln^2 3} \quad 21) \frac{1}{4}$$

2. OBSAH PLOCHY ROVINNÉHO ÚTVARU

Zkouškové úlohy. V následujících úlohách vypočítejte obsah plochy rovinného útvaru ohraničeného danými křivkami.

- 1) $y = x^2 - 2x$, $y = x + 4$ 2) $y = 2$, $y = \frac{x^2}{2}$, $y = x$
3) $x = 1$, $y = e^x$, $y = e^{-x}$ 4) $y = 0$, $y = \sqrt{2x + 8}$, $y = \sqrt{2 - x}$
5) $y = \ln(x + 2)$, $y = 2 \ln x$, $y = 0$ 6) $y = x^2 + 1$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 5$

Výsledky.

- 1) $\frac{125}{6}$ 2) $\frac{14}{3}$ 3) $e + \frac{1}{e} - 2$
4) 8 5) $\ln 16 - 1$ 6) $\frac{20\sqrt{10}-32}{3}$