11. HODNOST MATICE, ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC GAUSSOVOU ELIMINACÍ A CRAMEROVÝM PRAVIDLEM

CVIČENÍ PEF — PAA (DOPORUČENÉ ÚLOHY)

1. Hodnost matice

Zkouškové úlohy. 1) Stanovte hodnosti matic

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -2 & 4 \\ 13 & -5 & 6 & 1 \\ 2 & -6 & 7 & 2 \\ -1 & 7 & 7 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & -5 & 1 & -3 \\ -3 & 8 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Stanovte hodnost matice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & m & 1 \\ 0 & 5 & m \end{pmatrix}$ v závislosti na parametru m.

Výsledky.

1) $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = 4, \mathrm{h}(\boldsymbol{B}) = 3$ 2) $\mathrm{h} = 2$ pro $m = 3 \pm 2\sqrt{6}$, jinak $\mathrm{h} = 3$

2. Soustavy lineárních rovnic

Základní úlohy. Řešte homogenní soustavy lineárních rovnic:

$$1)\ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 0 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 4y & + & 2z & = & 0 \\ 6x & - & 12y & + & 6z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array}.$$

Rozhodněte o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic:

$$3)\ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 3x & + & 2y & & & = & 7 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 6 \end{array} \qquad 4)\ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 4 \\ 2x & - & y & + & 4z & = & -4 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 5 \end{array}$$

$$5)\ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ 3x & & & + & z & = & 6 \end{array}.$$

Řešte nehomogenní soustavy lineárních rovnic:

$$6)\ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & y & + & z & + & v & = & 1 \\ & & y & + & 12z & & & = & 2 \\ x & + & y & + & 22z & + & v & = & 3 \\ x & - & 2y & & & - & v & = & -5 \end{array} \qquad 7)\ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & - & z & & & = & -2 \\ & & y & - & z & & & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & + & v & = & 4 \\ x & - & y & - & 2z & & & = & 1 \end{array}.$$

Zkouškové úlohy. Řešte nehomogenní soustavy lineárních rovnic:

$$8)\ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 4y & + & 2z & & & = & 1 \\ 4x & - & 11y & + & 13z & - & 15t & = & 4 \\ x & - & 3y & + & 3z & - & 3t & = & 1 \\ 3x & - & 7y & + & 11z & - & 15t & = & 3 \end{array} \qquad 9)\ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & & & - & t & = & 4 \\ 2x & - & 3y & + & z & - & 3t & = & 9 \\ -x & - & y & + & 2z & - & t & = & -2 \\ 2x & + & 3y & - & z & - & t & = & -1 \end{array}.$$

Výsledky. Označme vektor řešení symbolem $\mathbf{u}$.

1) $\mathbf{u} = (0, 0, 0)$
2) $\mathbf{u} = s(2, 1, 0) + t(-1, 0, 1), s, t \in \mathbb{R}$
3) jediné řešení
4) nemá řešení
5) nekonečně mnoho řešení
6) $\mathbf{u} = (\frac{17}{7}, \frac{26}{7}, -\frac{1}{7}, 0)$
7) nemá řešení
8) $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 0) + s(12, 3, 0, 1) + t(-6, -1, 1, 0), s, t \in \mathbb{R}$
9) $\mathbf{u} = (2, -2, -1, 0) + t(1, 0, 1, 1), t \in \mathbb{R}$

3. Determinanty a Cramerovo pravidlo

Základní úlohy. Vypočítejte determinant.

$$1)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -9 & -5 \end{vmatrix} \quad 2)\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \quad 3)\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & -4 & -5 \end{vmatrix} \quad 4)\ \begin{vmatrix} -2 & 3 & 24 \\ 10 & 2 & -46 \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix}$$

Zkouškové úlohy. Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu lineárních rovnic.

$$5)\ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 5y & + & z & = & -2 \\ x & - & 3y & - & 4z & = & 1 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & = & 5 \end{array} \qquad 6)\ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 2 \\ x & + & 2y & - & 5z & = & 6 \\ x & - & 4y & + & 10z & = & 3 \end{array}$$

Výsledky.

1) 3 2) -1 3) 85
4) -976 5) $(x, y, z) = (3, -2, 2)$ 6) $(x, y, z) = (5, 3, 1)$