

NEURČITÝ INTEGRÁL — ZÁKLADNÍ VZORCE, PRAVIDLA, METODY

Tabulkové integrály.

$\int 0 \, dx = C$	na $(-\infty, \infty)$,
$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	na $(0, \infty)$ (resp. \mathbb{R} nebo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$),
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	na $(-\infty, 0)$ nebo na $(0, \infty)$,
$\int e^x \, dx = e^x + C$	na $(-\infty, \infty)$,
$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$	na $(-\infty, \infty)$,
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	na $(-\infty, \infty)$,
$\int \cos x \, dx = \sin x + C$	na $(-\infty, \infty)$,
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cotg x + C$	na $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tg x + C$	na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$	na $(-\infty, \infty)$,
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	na $(-1, 1)$.

Pravidla pro integrování. Nechtě funkce f, g mají na intervalu \mathcal{J} primitivní funkce. Potom také funkce $(f + g)$, $(f - g)$ a cf , $c \in \mathbb{R}$, mají na \mathcal{J} primitivní funkce a platí

$$\begin{aligned}\int (f(x) + g(x)) \, dx &= \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx, \\ \int (f(x) - g(x)) \, dx &= \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx, \\ \int cf(x) \, dx &= c \int f(x) \, dx.\end{aligned}$$

Integrační metody.

Metoda přímé integrace. Provádějí se pouze základní algebraické úpravy výrazů a používají se základní integrační vzorce a pravidla.

Metoda integrace per partes.

$$\int u(x)v'(x) \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = u(x) & v' = v'(x) \\ u' = u'(x) & v = v(x) \end{array} \right| = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) \, dx$$

Metoda integrace substitucí.

- 1. způsob

$$\begin{aligned}\int f(g(x))g'(x) \, dx &= \left| \begin{array}{l} g(x) = t \\ g'(x) \, dx = dt \end{array} \right| = \int f(t) \, dt \\ &= F(t) + C = F(g(x)) + C\end{aligned}$$

- 2. způsob

$$\begin{aligned}\int f(t) dt &= \left| \begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x) dx \end{array} \right| = \int f(g(x)) g'(x) dx \\ &= G(x) + C = \left| \begin{array}{l} g(x) = t \\ x = g^{-1}(t) \end{array} \right| = G(g^{-1}(t)) + C\end{aligned}$$

Užitečné vzorce.

$$\begin{aligned}\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln |f(x)| + C \\ \int \frac{f'(x)}{(f(x))^k} dx &= \frac{-1}{(k-1)(f(x))^{k-1}} + C \quad (k \neq 1)\end{aligned}$$