# DŮLEŽITÉ VZTAHY A VZORCE

1. **Reálná čísla, nerovnosti.** Pro všechna reálná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\begin{aligned} a < b \ \wedge\ b < c &\implies a < c \\ a < b &\iff a + c < b + c, \\ \text{pro } c > 0 \quad \text{je} \quad a < b &\iff c\,a < c\,b, \\ \text{pro } c < 0 \quad \text{je} \quad a < b &\iff c\,a > c\,b \quad (\text{speciálně: } a < b \iff -a > -b), \\ \text{pro } a, b \geq 0 \quad \text{je} \quad a < b &\iff a^2 < b^2 \end{aligned}$$

(analogické vlastnosti platí také pro relace $\leq$, $>$ a $\geq$).

*Pro řešení nerovnic je důležité:*

$$\begin{aligned} ab > 0 &\iff \text{buď } a > 0 \ \wedge\ b > 0 \text{ anebo } a < 0 \ \wedge\ b < 0, \\ ab < 0 &\iff \text{buď } a > 0 \ \wedge\ b < 0 \text{ anebo } a < 0 \ \wedge\ b > 0. \end{aligned}$$

Speciálně:

$$\begin{aligned} &a^2 > 0 \quad \text{pro každé } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ &a^2 = 0 \quad \iff \quad a = 0, \\ &a^2 \geq 0 \quad \text{pro každé } a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. **Druhé mocniny a součiny dvojčlenů.** Platí

$$\begin{aligned} &(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \qquad (A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2, \\ &A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \qquad (\text{kde } A, B \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

3. **Druhá odmocnina v $\mathbb{R}$.** Druhá odmocnina $\sqrt{x}$ reálného čísla $x$ je *nezáporné* reálné číslo $a$, pro které platí $a^2 = x$, tj.

$$\sqrt{x} = a \quad \iff \quad a \geq 0 \wedge a^2 = x.$$

Z faktu $a^2 \geq 0$ pro každé $a \in \mathbb{R}$ plyne, že $\sqrt{x}$ má smysl v $\mathbb{R}$ pouze pro $x \geq 0$.

4. **Absolutní hodnota reálného čísla.** Je $|x| = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Platí

$$|a| \geq 0, \quad |-a| = |a|, \quad |ab| = |a|\,|b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

pro $a, b \in \mathbb{R}$, pro něž jsou všechny výrazy definovány.

5. **Kvadratická rovnice.** Jedná se o rovnici

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (\text{kde } a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$$

s neznámou $x$.
Číslo $D = b^2 - 4ac$ se nazývá *diskriminant*. *Kořeny* $x_1$, $x_2$ určíme podle vzorců:

$$\begin{aligned} D > 0 \quad &\Rightarrow \quad x_{1,2} = \tfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} && \text{(2 různé reálné kořeny)}, \\ D = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = x_2 = -\tfrac{b}{2a} && \text{(1 dvojnásobný reálný kořen)}, \\ D < 0 \quad &\Rightarrow \quad x_{1,2} = \tfrac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{|D|}}{2a} \quad (\text{kde } \mathrm{i}^2 = -1) && \text{(2 komplexně sdružené kořeny)} \end{aligned}$$

(zdůrazněme, že je-li $D < 0$, pak kvadratická rovnice *nemá řešení v* $\mathbb{R}$).

Jiný způsob nalezení reálných kořenů kvadratické rovnice je založen na rovnosti:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Speciálně pro $a = 1$ je

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2,$$

tedy

$$b = -(x_1 + x_2), \quad c = x_1 x_2$$

*Poznámka* 1. Kořenům $x_1$, $x_2$ kvadradratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ říkáme také *nulové body* kvadratické funkce $\mathcal{P}_2(x) = ax^2 + bx + c$. Reálné nulové body $x_1$, $x_2$ určují první souřadnice průsečíků osy $x$ s grafem kvadratické funkce $\mathcal{P}_2$, tj. průsečíky křivky $y = P_2(x)$ s přímkou $y = 0$ jsou body $[x_1, 0]$, $[x_2, 0]$. V případě $x_1 = x_2$ se jedná o jeden průsečík. Pro $D < 0$ křivka $y = P_2(x)$ neprotíná osu $x$, tedy buď $P_2(x) > 0$, anebo $P_2(x) < 0$ pro všechna reálná čísla $x$.

6. **Binomické věta.** Pro $A, B \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k = \binom{n}{0} A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} B + \cdots + \binom{n}{n-1} A B^{n-1} + \binom{n}{n} B^n,$$

kde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$, $k! = k \cdot (k-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$.

7. **Polynomická funkce stupně $n$.** Jedná se o funkci

$$\mathcal{P}_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } n \in \mathbb{N},\ a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0\ .$$

Podle *Základní věty algebry* má rovnice $n$-tého stupně $\mathcal{P}_n(x) = 0$ v množině komplexních čísel právě $n$ kořenů. Některé z nich se sobě mohou rovnat. Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_m$ navzájem různé kořeny, pak platí

$$\mathcal{P}_n(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_m)^{k_m}.$$

Čísla $k_1, \ldots, k_m$ jsou *násobnosti* kořenů $x_1, \ldots, x_m$ (v tomto pořadí) a platí $k_1 + \cdots + k_m = n$.

8. **Mocniny a odmocniny s obecnými exponenty.** Jsou-li $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{R}$, pak platí pro $x, y \in (0, \infty)$ (některé vzorce také pro záporné nebo nulové $x$, $y$):

$$\begin{array}{llll}
x^r\, x^s = x^{r+s}, & x^r : x^s = \frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}, & x^{-r} = \frac{1}{x^r}, & x^0 = 1, \\
x^r\, y^r = (x\, y)^r, & \frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r, & \frac{1}{x^r} = \left(\frac{1}{x}\right)^r, & (x^r)^s = x^{rs}, \\
\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, & \sqrt[n]{x\, y} = \sqrt[n]{x}\, \sqrt[n]{y}, & \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}, & \\
\sqrt[n]{x^r} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^r = x^{\frac{r}{n}}, & \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n\cdot m]{x}, & \sqrt[n]{x^n} = x &
\end{array}$$

9. **Exponenciála a logaritmus.** Předpokládejme, že $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$. Potom

$$\begin{array}{llll}
a^y = x & \Leftrightarrow \quad y = \log_a x & (\text{pro } x > 0,\ y \in \mathbb{R}) & (\text{obecný logaritmus}), \\
10^y = x & \Leftrightarrow \quad y = \log x & (\text{pro } x > 0,\ y \in \mathbb{R}) & (\text{dekadický logaritmus}), \\
e^y = x & \Leftrightarrow \quad y = \ln x & (\text{pro } x > 0,\ y \in \mathbb{R}) & (\text{přirozený logaritmus})
\end{array}$$

($e = 2,718\ldots$ je *Eulerovo číslo*).
Pro $u, v > 0$, $s \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{array}{lll}
\log_a(u\, v) = \log_a u + \log_a v, & \log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v, & \log_a\left(u^s\right) = s\, \log_a u, \\
\log_a\left(\sqrt[n]{u}\right) = \frac{1}{n} \log_a u, & \log_a 1 = 0, & \log_a a = 1, \\
s = \log_a\left(a^s\right), & a^{\log_a u} = u, & u^s = a^{s \log_a u}.
\end{array}$$

Poslední vzorec slouží k definici obecné mocniny. Většinou se používá pro $a = 10$ nebo $a = e$ tj.

$$u^s = 10^{s \log u}, \quad u^s = e^{s \ln u}.$$

## 10. **Goniometrické funkce.**

*Vzorce pro goniometrické funkce.* Je-li $k \in \mathbb{Z}$, pak platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která mají obě strany smysl:

$$\cos x = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{tg} x = \tfrac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \tfrac{\cos x}{\sin x},$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x,$$

$$\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x, \quad \cos(x \pm 2k\pi) = \cos x, \quad \operatorname{tg}(x \pm k\pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(x \pm k\pi) = \operatorname{cotg} x.$$

Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, pro která mají obě strany smysl, platí:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \tfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \qquad \operatorname{cotg}(x \pm y) = \tfrac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} y \pm \operatorname{cotg} x},$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$\operatorname{tg} 2x = \tfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \qquad \operatorname{cotg} 2x = \tfrac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x},$$

$$\sin^2 x = \tfrac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \tfrac{1 + \cos 2x}{2}.$$

*Tabulka důležitých hodnot goniometrických funkcí.*

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | – | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | – | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $\operatorname{cotg} x$ | – | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | – | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ |

V tabulce je nutné si hlavně zapamatovat funkční hodnoty pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, funkční hodnoty v dalších intervalech se snadno odvodí ze základních vlastností goniometrických funkcí (periodičnost, sudost, lichost).

## 11. **Cyklometrické funkce.**

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y \quad \text{pro} \quad y \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle,\ x \in \langle -1, 1 \rangle \quad (\arcsin = \text{arkussinus}),$$

$$y = \arccos x \iff x = \cos y \quad \text{pro} \quad y \in \langle 0, \pi \rangle,\ x \in \langle -1, 1 \rangle \quad (\arccos = \text{arkuskosinus}),$$

$$y = \operatorname{arctg} x \iff x = \operatorname{tg} y \quad \text{pro} \quad y \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}),\ x \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{arctg} = \text{arkustangens}),$$

$$y = \operatorname{arccotg} x \iff x = \operatorname{cotg} y \quad \text{pro} \quad y \in (0, \pi),\ x \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{arccotg} = \text{arkuskotangens}).$$

12. **Definiční obor reálné funkce reálné proměnné.** Při určování definičního oboru reálné funkce reálné proměnné $x$ nejdříve stanovíme podmínky, za nichž má funkční předpis smysl.

*Nejdůležitější podmínky jsou uvedeny v následující tabulce.*

| | |
|---|---|
| *výraz ve jmenovateli musí být nenulový*: | $\dfrac{1}{g(x)}$ má smysl pro $g(x) \neq 0$ |
| *výraz pod druhou odmocninou musí být nezáporný*: | $\sqrt{g(x)}$ má smysl pro $g(x) \geq 0$ |
| *výraz pod sudou odmocninou musí být nezáporný*: | $\sqrt[2k]{g(x)}$ má smysl pro $g(x) \geq 0$ |
| *argument logaritmu musí být kladný*: | $\log\big(g(x)\big)$ má smysl pro $g(x) > 0$ |
| *argument* arcsin *musí náležet do intervalu* $\langle -1, 1 \rangle$: | $\arcsin\big(g(x)\big)$ má smysl pro $-1 \leq g(x) \leq 1$ |
| *argument* arccos *musí náležet do intervalu* $\langle -1, 1 \rangle$: | $\arccos\big(g(x)\big)$ má smysl pro $-1 \leq g(x) \leq 1$ |